Números perfectos

Ricardo Rodríguez

¿Qué es un número perfecto?

Tomemos $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

¿Qué tiene de interesante esta descomposición?

¿Qué es un número perfecto?

Un número perfecto es un número natural, que puede expresarse como la suma de todos sus divisores propios.

Números abundantes y deficientes

Un número es abundante si la suma de sus divisores propios, es mayor al número. Por ejemplo, el 12:

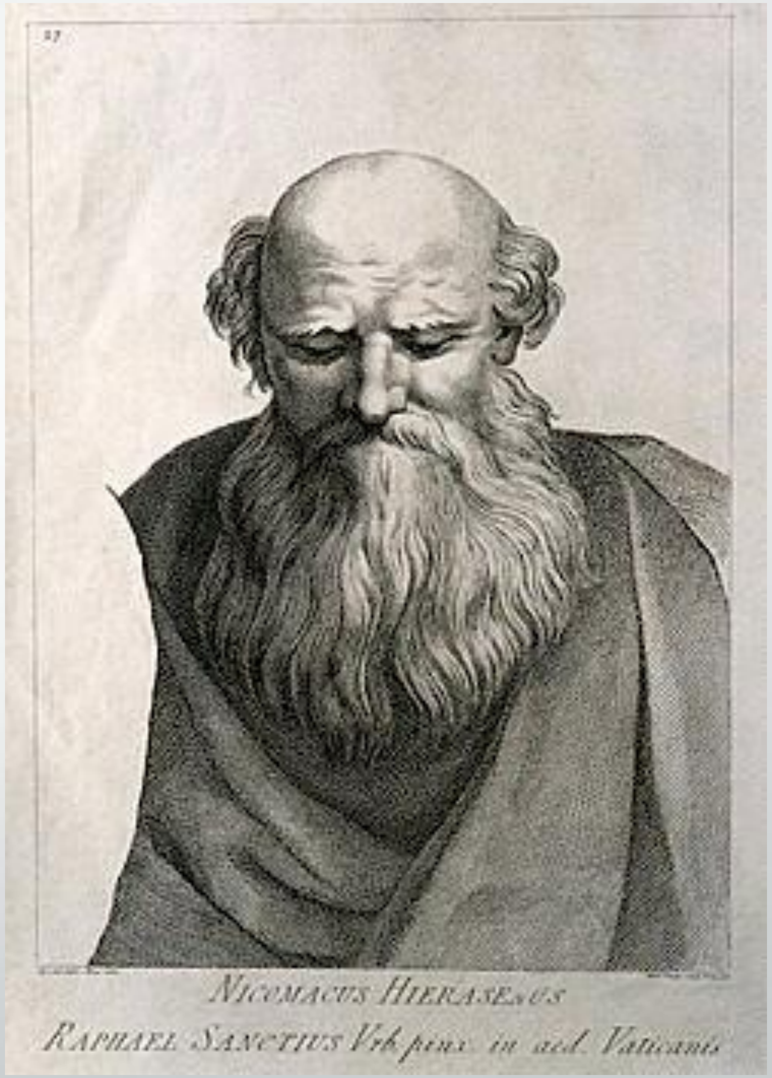
$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

Un número es deficiente si la suma de sus divisores propios, es menor al número. Por ejemplo, el 8:

$$1 + 2 + 4 = 7$$

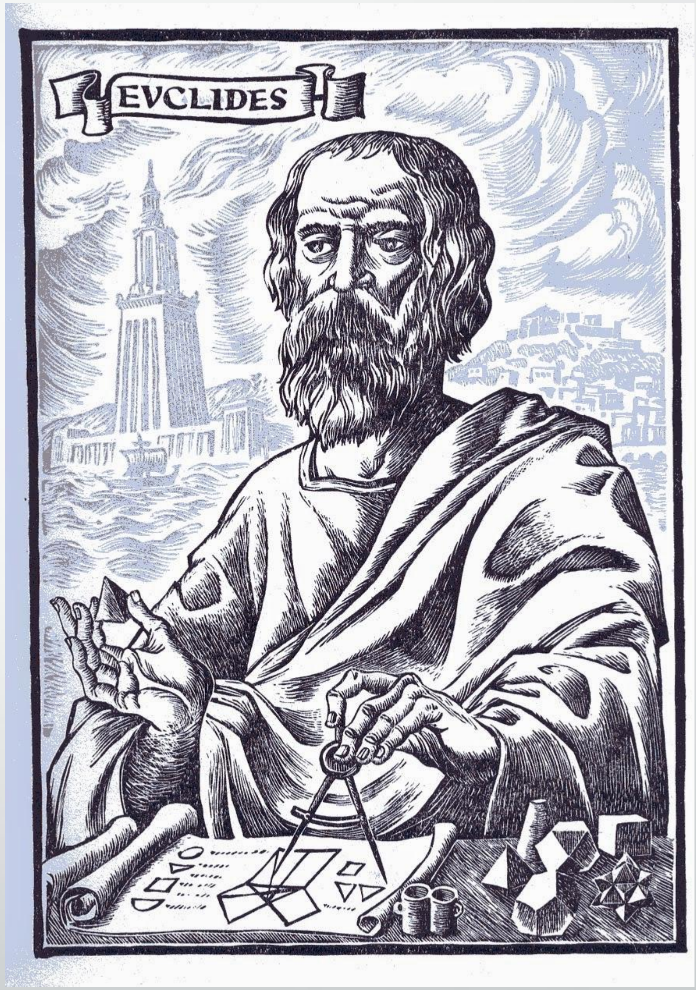
Propiedades listadas por Nicómaco de Gerasa

1. El n-ésimo número perfecto tiene n cifras.
2. Todos los números perfectos son pares.
3. Todos los números perfectos acaban en 6 u 8 alternativamente.
4. Todo número perfecto es de la forma $(2^{\mathrm{p}}-1)\cdot 2^{\mathrm{p}-1}$ donde $(2^{\mathrm{p}}-1)$ es primo.
5. Existen infinitos números perfectos.



Fórmula de los números perfectos

Teorema (Euclides): Si $2^{p} - 1$ es primo, entonces $(2^{p} - 1) \cdot 2^{p-1}$ es un número perfecto.



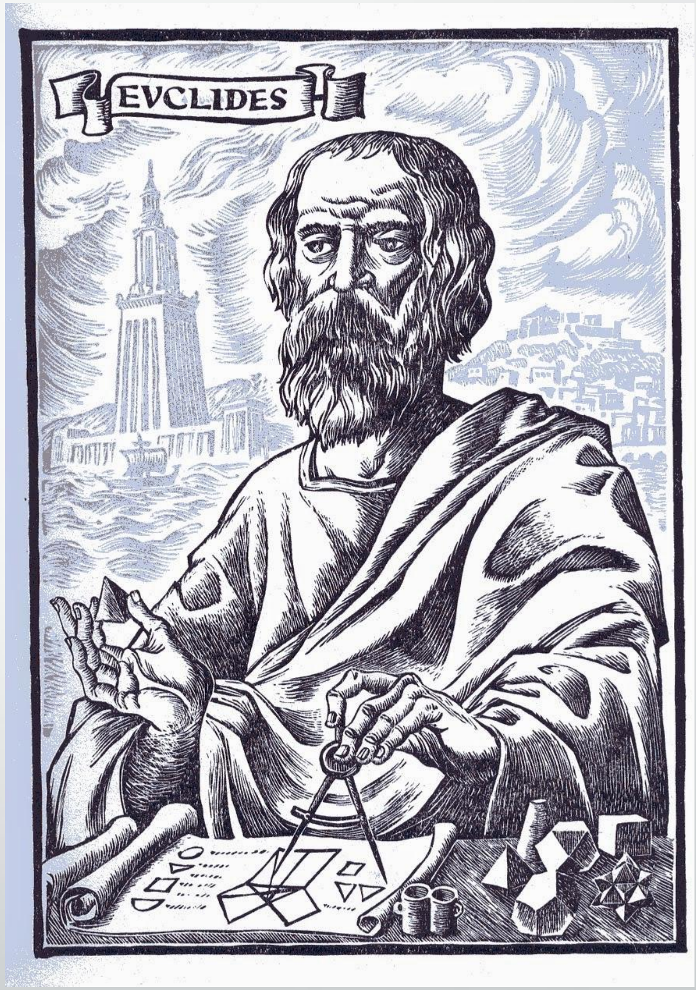
Los primeros cuatro números perfectos

$6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$



El n-ésimo número perfecto tiene n cifras.

Johannes Müller encontró el quinto número perfecto (33,550,336) . Nótese que el enunciado es falso.

Todos los números perfectos acaban en 6 u 8 alternativamente

Johannes Müller encontró el sexto número perfecto (8,589,869,056) . Nótese que el enunciado es falso.

Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

Proposiciones de Fermat

1. Si n es compuesto, entonces $2^n - 1$ es compuesto.
2. Si n es primo, entonces $2^n - 2$ es un múltiplo de $2n$.
3. Si n es primo y p es un divisor primo de $2^n - 1$, entonces $p - 1$ es un múltiplo de n.

Generalización de las proposiciones de Fermat

Teorema pequeño de Fermat: Para todo primo p y todo a, no divisible por p, $a^{p-1} - 1$ es divisible por p.

Con esto se demuestra que la fórmula de Euclides no funciona para $\mathrm{n} = 23$ y $\mathrm{n} = 37$.

Euler

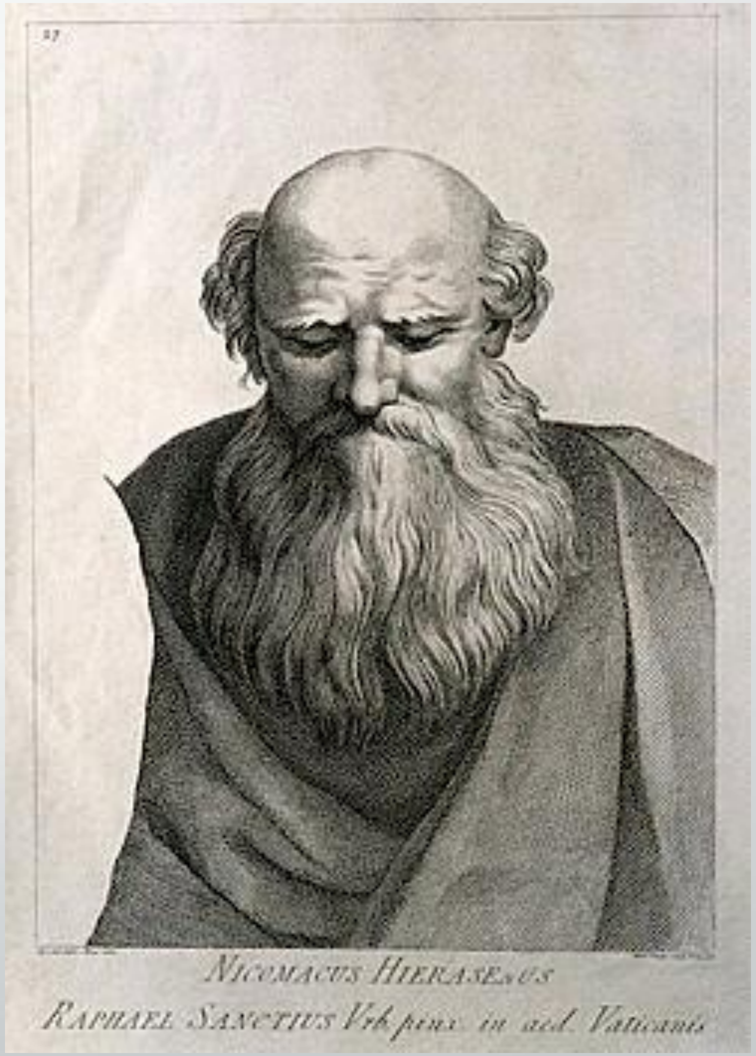
Teorema: Si n es un número perfecto par, entonces $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $(2^p - 1)$ es primo.

Nicómaco de Gerasa

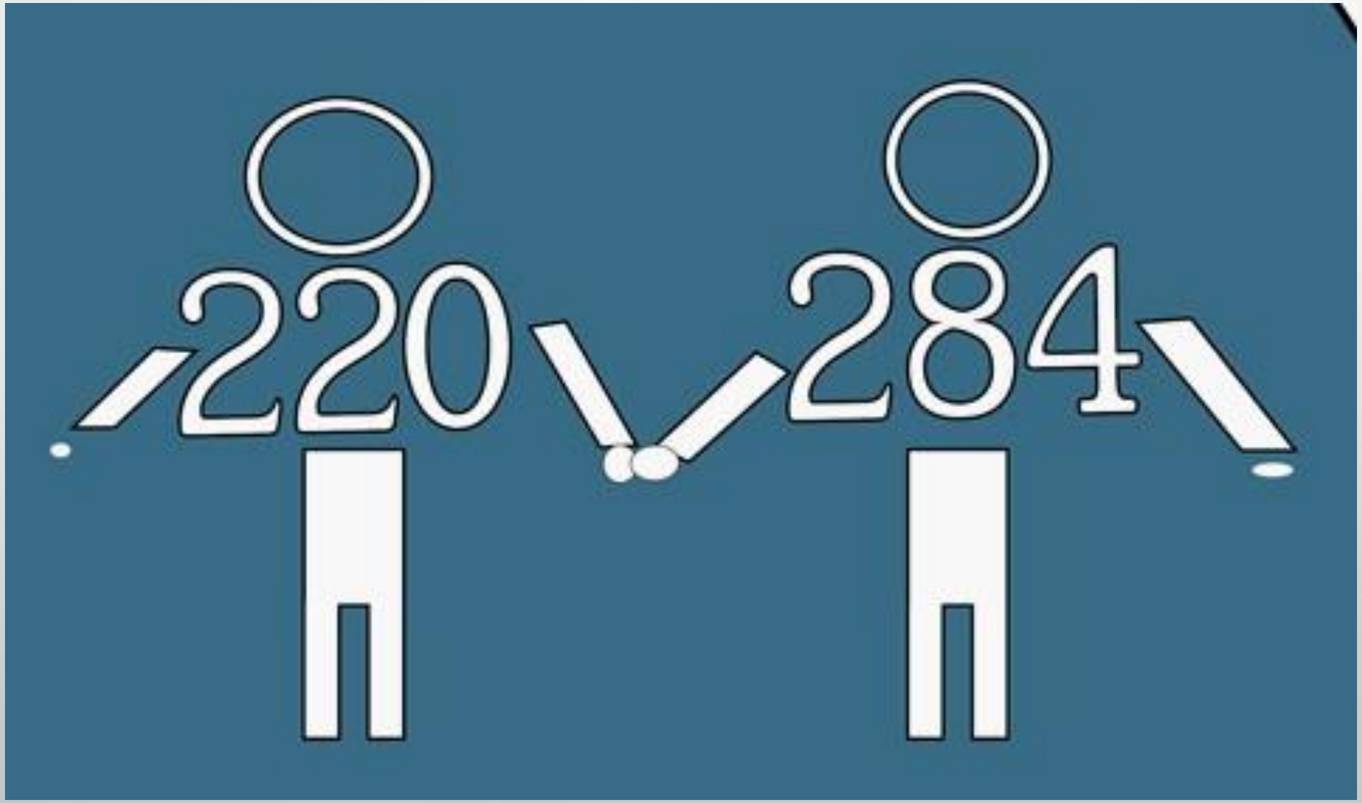
Teorema: Sea n un número perfecto de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$.

i. Si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod 4$, entonces la última cifra de n es 6.

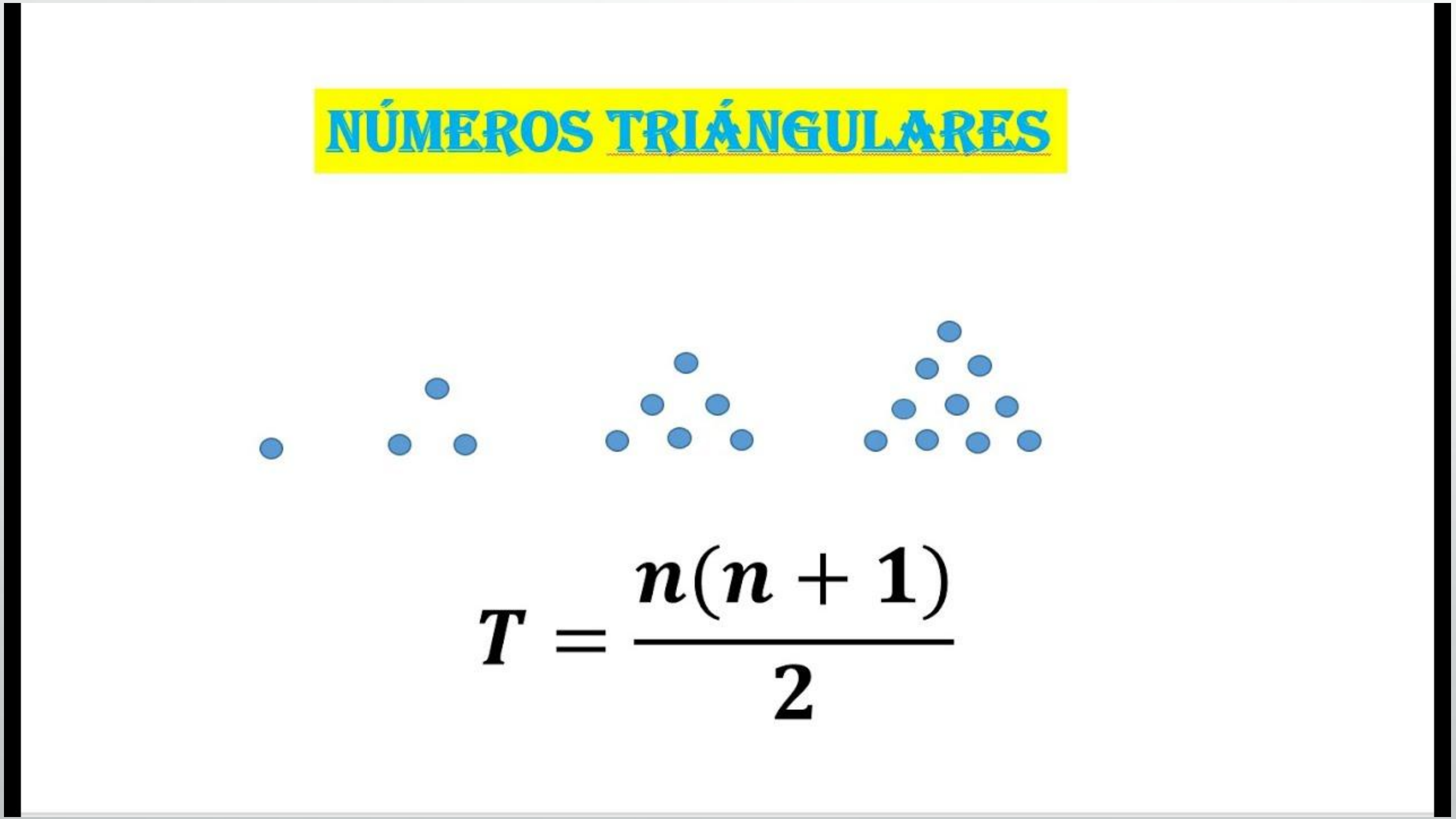
ii. Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces las dos últimas cifras de n son 28.



Los números perfectos son amigos de si mismo.



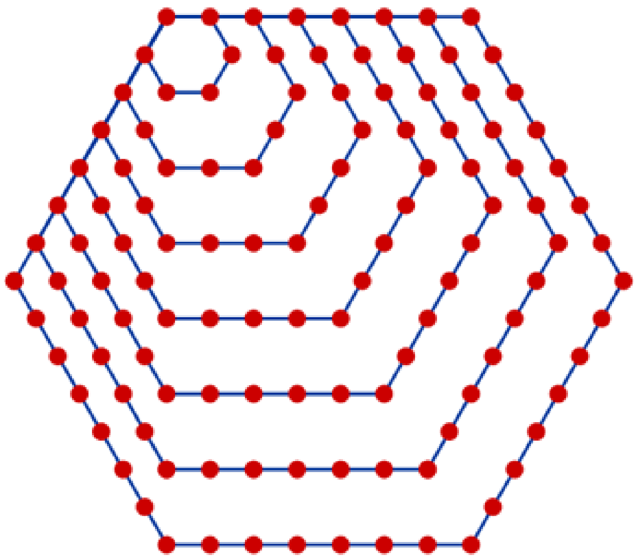
Los números perfectos son números triangulares.



Los números perfectos están en la pirámide de Pascal.

Los números perfectos son números hexagonales.

Hexágonos

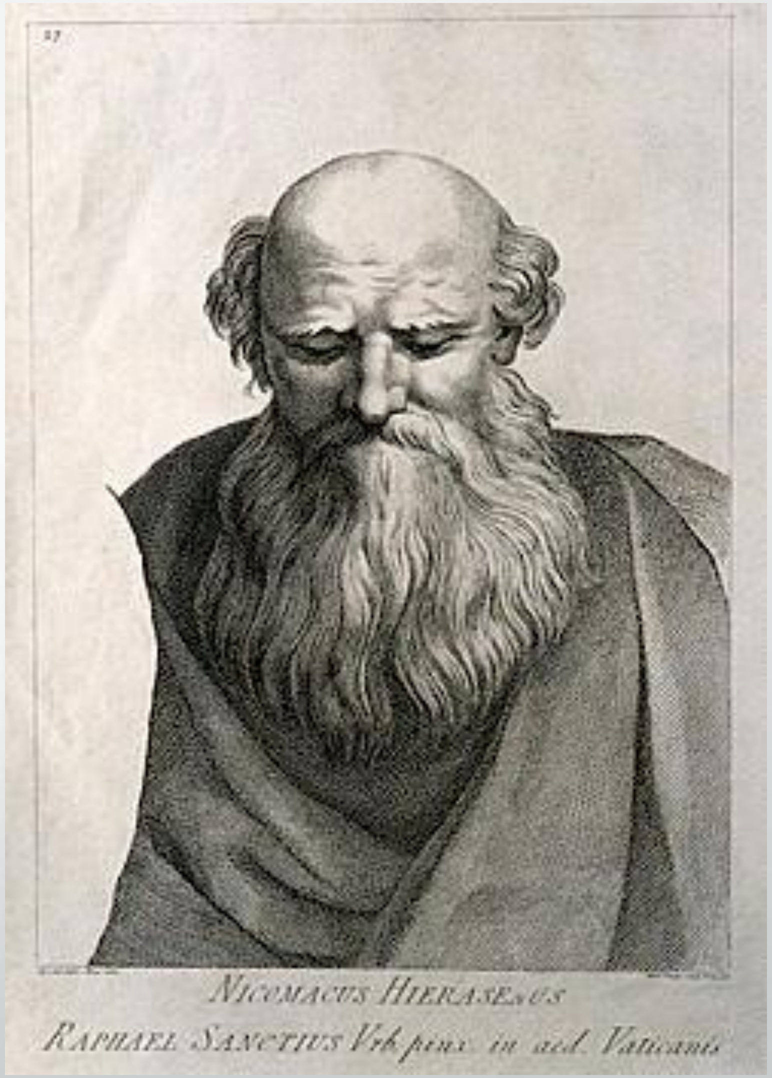


	Números hexagonales
1	1
2	1 + 5 = 6
3	1 + 5 + 9 = 15
4	1 + 5 + 9 + 13 = 28
5	1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45
6	1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 66
7	1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 = 91

$$h_n = 2n^2 - n$$

Propiedades listadas por Nicómaco de Gerasa

1. El n-ésimo número perfecto tiene n cifras.
2. Todos los números perfectos son pares.
3. Todos los números perfectos acaban en 6 u 8 alternativamente.
4. Todo número perfecto es de la forma $(2^p - 1) \cdot 2^{p-1}$ donde $(2^p - 1)$ es primo.
5. Existen infinitos números perfectos.



¿Existen números perfectos impares?

1. Si existe debe ser mayor que 10^{300}.
2. Debe contener al menos 8 factores primos distintos u 11 factores distintos en caso de que sea divisible entre 3.
3. Investigación de José William Porras.

Referencias

- Bueso, J. (1991). Números perfectos y matemáticos imperfectos. Extraído de: https://wpd.ugr.es/~academia/discursos/4%20Jose%20Luis%20Bueso%20Montero.pdf
- Porras, J. (2024). Los números perfectos. Extraído de: https://www.researchgate.net/publication/380513406_Los_numeros_perfectos