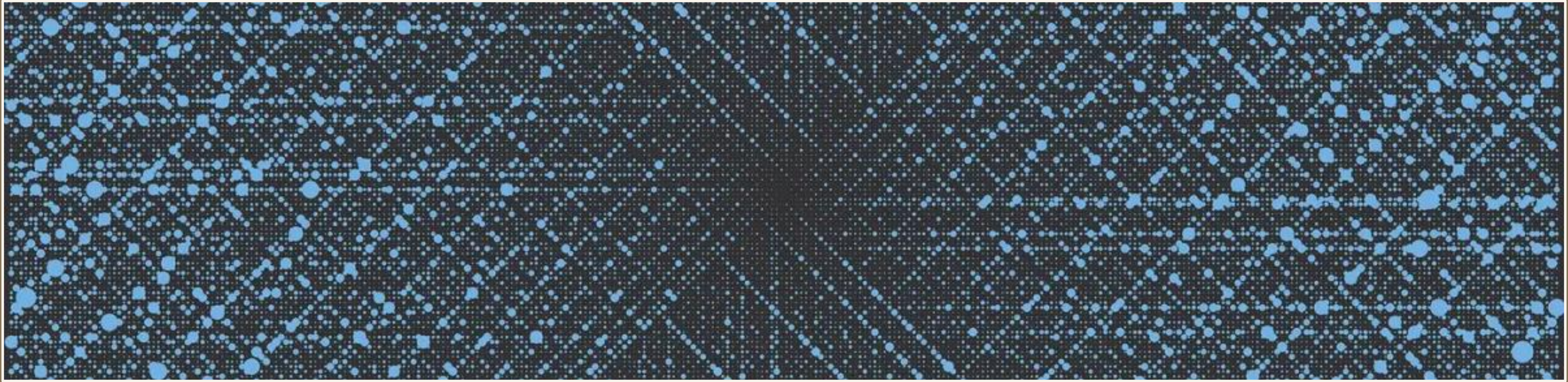
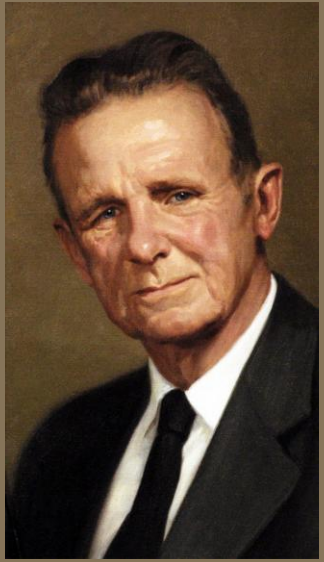
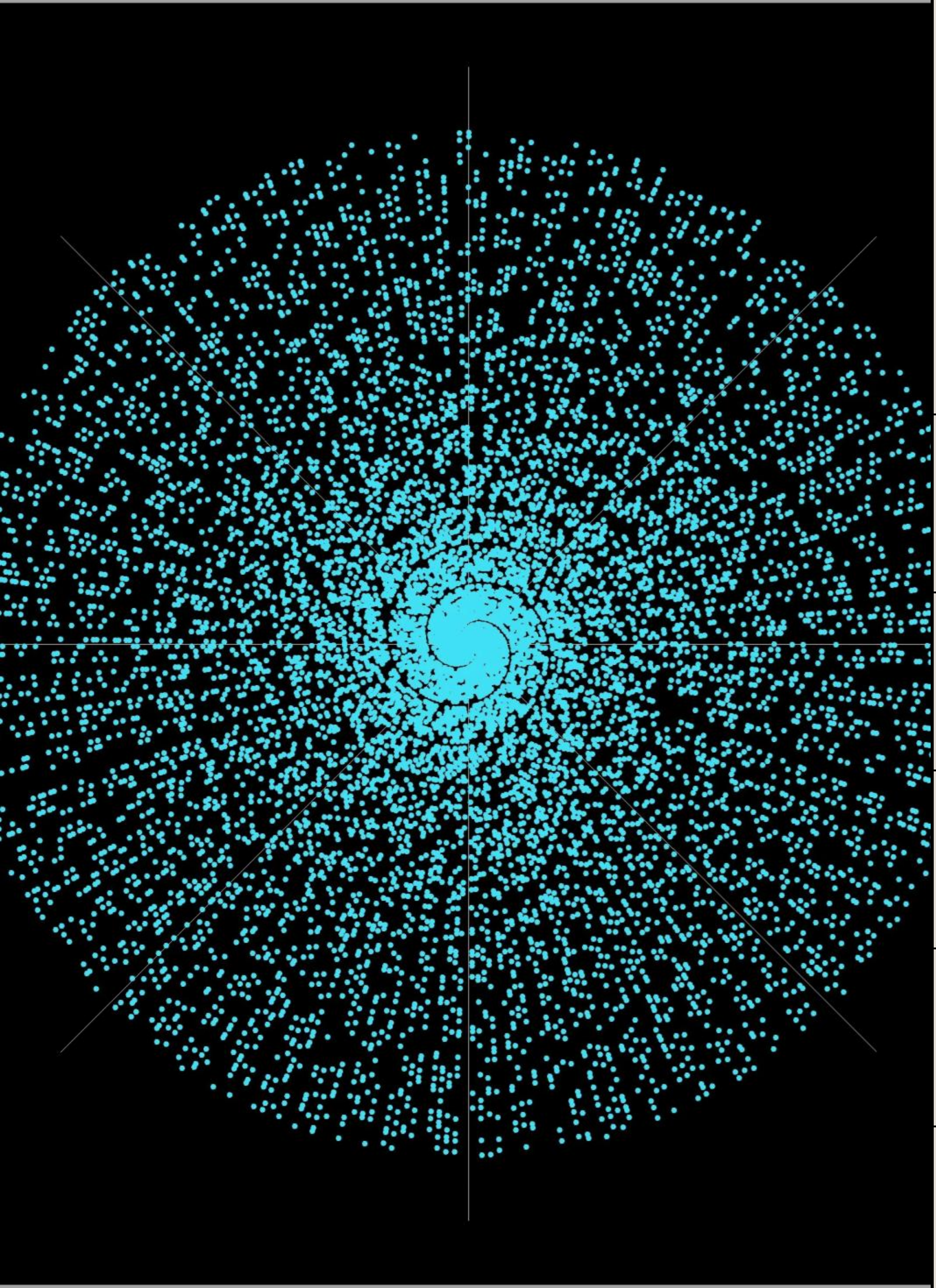




SEMINARIO II: "BRECHAS" ENTRE PRIMOS Y LA

CONJETURA DE CRAMÉR

Ricardo Morales - 22289



AGENDA

EL MISTERIO DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Los números primos son los "átomos" de la aritmética.

- **El problema**: Su distribución parece aleatoria y caótica.

➢ Ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

No nos interesan los primos en sí, sino las "brechas" (gaps) entre ellos.

$$g_1 = 3 - 2 = 1;\ g_2 = 5 - 3 = 2;\ g_3 = 7 - 5 = 2;\ g_4 = 11 - 7 = 4;$$

Pero,

$$g_5 = 13 - 11 = 2$$

La verdadera pregunta es, **¿qué tan grande puede llegar a ser una de estas brechas?**

BRECHAS "PROMEDIO" VS. "MÁXIMAS"

El teorema de los números primos (probado en 1896) describe cómo se distribuyen los primos. Establece que la función de conteo de primos, $\pi(x)$ (cuántos primos hay menores o iguales a x), se comporta como:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Si "dividimos por x", obtenemos la **densidad** o "probabilidad" de que un número en la vecindad de x sea primo:

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log x}$$

La brecha promedio es simplemente el inverso de esta densidad. Por lo tanto, la separación promedio esperada entre primos cerca de x es: brecha promedio $\approx \log x$.

Esto solo describe el promedio. La Conjetura de Cramér busca un límite para la brecha máxima.

Harald Cramér

25/09/1893 – 05/10/1985
Matemático Sueco

SU CONJETURA

$$\boxed{p_{n+1} - p_n = O((\log p_n)^2)}$$

Intuitivamente, la brecha máxima

$$g_n = p_{n+1} - p_n$$

crece más o menos como el cuadrado de la brecha promedio.

¡Aclaraciones!

- Como vimos, esto **NO** significa que $g_n = (\log p_n)^2$.
- Significa que g_n está acotada por esta función. Hay una constante C tal que $g_n < C \cdot (\log p_n)^2$ para todos los primos p_n.

“VERSIÓN FUERTE” DE LA CONJETURA

Cramér fue más específico. Utilizando un límite superior:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{g_n}{(\log p_n)^2} = 1$$

Esto significa que la proporción entre la “brecha récord” g_n y $(\log p_n)^2$ se acerca a 1 infinitamente a menudo.

Dicho de otra forma, Cramér creía que $(\log p_n)^2$ no era solo un “límite de velocidad” con el cual crecía la brecha máxima, sino el “límite de velocidad” **exacto**.

BASE HEURÍSTICA DE LA CONJETURA

1. El punto de partida: El teorema de los números primos.

La conjetura no es una adivinanza, es el resultado de un modelo matemático formal basado en nuestro mejor conocimiento de los primos: el **Teorema de los Números Primos**.

- El **teorema** (demostrado en 1896) nos dice que la densidad de los primos alrededor de un número x es $1/\log x$.
- Esto se puede interpretar como: "La probabilidad de que un número n elegido al azar sea primo es $P(n\ es\ primo) \approx 1/\log n$."
- Este fue el único dato sólido que Cramér usó.

BASE HEURÍSTICA DE LA CONJETURA

2. La Gran Idea: El Modelo Aleatorio de Cramér.

- Cramér formuló una hipótesis audaz: **"¿Qué pasaría si esta probabilidad es lo único que importa?"**

- Él propuso un modelo (el "**Modelo de Primos Aleatorios**") donde cada número n se somete a una prueba de Bernoulli (un evento aleatorio independiente) para ser un "primo de Cramér" con probabilidad $P_n = \frac{1}{\log n}$.

- La suposición clave es la **independencia**: que un número sea primo no afecta la probabilidad de que sus vecinos lo sean **(¡una suposición que, como veremos, es útil pero falsa!)**.

BASE HEURÍSTICA DE LA CONJETURA

3. La Derivación.

En este modelo, ¿cuál es la probabilidad de tener una “brecha” (gap) de tamaño k justo después de n?

R/ Sería la probabilidad de k “fracasos” seguidos (es decir, k números “compuestos”).

$$P(\text{brecha de } k) = P(n+1 \text{ no es primo}) \times \cdots \times P(n+k \text{ no es primo})$$

$$P(\text{brecha de } k) \approx \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^k$$

BASE HEURÍSTICA DE LA CONJETURA

¿Qué tan grande debe ser k para que sea probable encontrar una *brecha* así al menos una vez al revisar todos los números hasta N?

Buscamos la "brecha máxima esperada". Esto ocurre cuando la probabilidad de encontrar la brecha es del orden de $\frac{1}{N}$. Buscamos resolver:

$$\left(1 - \frac{1}{\log N}\right)^k \approx \frac{1}{N}$$

BASE HEURÍSTICA DE LA CONJETURA

Tomando logaritmos y usando la aproximación $\log(1-x) \approx -x$ (para x pequeño).

$$k \cdot \left(-\frac{1}{\log N}\right) \approx -\log N$$

Resolviendo para k (el tamaño de la brecha):

$$k \approx (\log N)^2$$

El término $(\log p_n)^2$ no es arbitrario. Es el resultado directo de preguntar: “En un universo donde los primos solo obedecen al teorema de los números primos y son por lo demás aleatorios, ¿cuál es la brecha máxima que esperamos encontrar?”

ESTADO ACTUAL DE LA CONJETURA

Qué ha sido probado o refutado.

Guido Hoheisel

14/07/1894 – 11/10/1968
Matemático Alemán

Un matemático alemán en tiempos de la segunda guerra mundial.

En 1930, Hoheisel logró probar que:

$$g_n = O(p_n^\theta) \text{ con } \theta < 1.$$

Básicamente probó que g_n crece más lento que p_n.

R. Baker, G. Harman, J. Pintz

Imágenes tomadas con fines educativos

El mejor resultado encontrado a la fecha se debe a un grupo de matemáticos.

En 2001, Baker, Harman y Pintz lograron encontrar el límite superior más pequeño hasta la fecha:

$$g_n = O(p_n^{0.525})$$

Básicamente lo podemos ver como

$$g_n = O(\sqrt{p_n})$$

Aunque impresionante, la brecha entre esta cota probada y el crecimiento logarítmico $(\log p_n)^2$ que postula la conjetura sigue siendo inmensa.

Robert Rankin

27/10/1915 – 27/01/2001
Matemático Escocés

En 1938, Rankin demostró que las brechas pueden ser más grandes que el promedio. Encontró brechas de tamaño:

$$g_n > C \cdot \frac{(\log p_n)(\log\log p_n)\,(\log\log\log\log p_n)}{(\log\log\log p_n)^2}$$

Esto prueba que existen brechas anormalmente grandes, lo cual apoya la idea de que las brechas máximas crecen más rápido que el promedio $\log p_n$.

AVANCES MODERNOS

¿Está mal el modelo de Cramér?

El problema es que el modelo de Cramér es demasiado aleatorio.

Por ejemplo, el modelo predice que habrá infinitos primos "gemelos" (diferencia de 2). Eso está bien.

Pero también predice que habrá infinitos primos con diferencia de 1.
¡Esto no es posible! (Solo 2 y 3).

AVANCES MODERNOS

- Corrigió el modelo para tener en cuenta “pequeñas conspiraciones” aritméticas (como que los números no pueden ser pares, o divisibles por 3, etc.).

- El modelo corregido de Granville sugiere que la conjetura original de Cramér es... **¡ligeramente incorrecta!**

Andrew Granville

Matemático Británico

AVANCES MODERNOS

- **Conjetura de Cramér** (1936):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{(\log p_n)^2} = 1$$

- **Conjetura de Granville** (1995):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{(\log p_n)^2} = 2e^{-\gamma} \approx 1.1229\ldots$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Andrew Granville

Matemático Británico

AVANCES MODERNOS

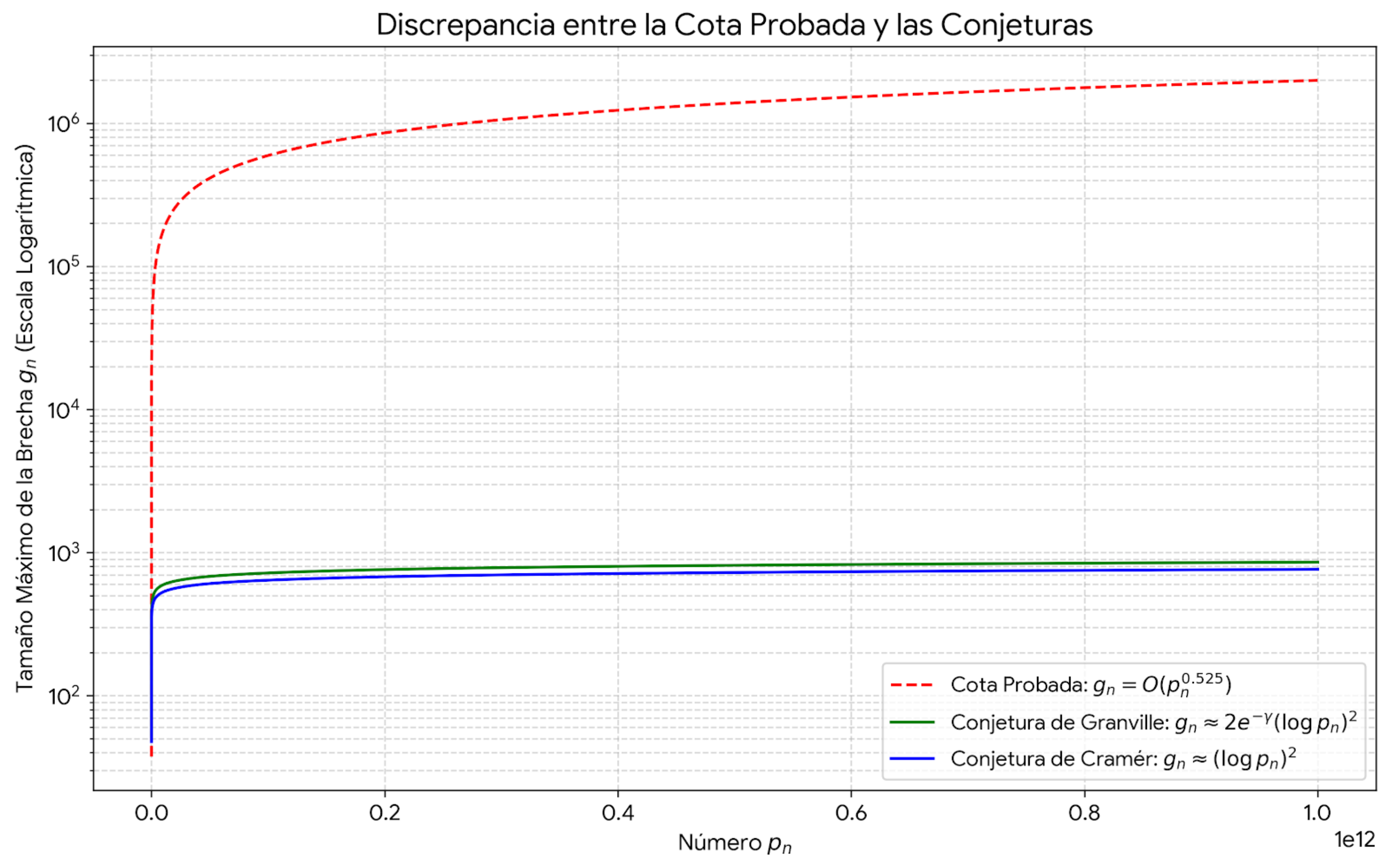
- **Conjetura de Cramér** (1936):

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{g_n}{(\log p_n)^2} = 1$$

- **Conjetura de Granville** (1995):

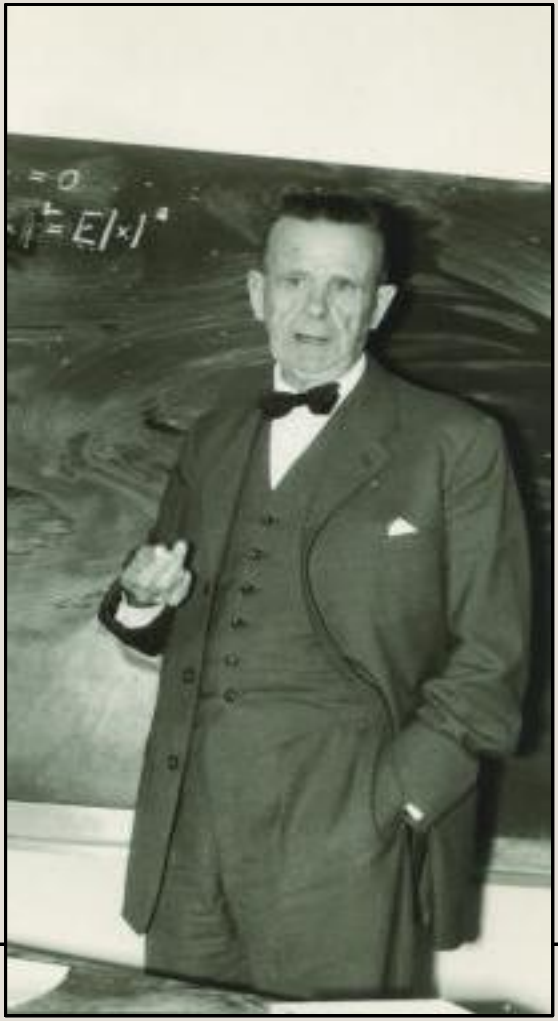
$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{g_n}{(\log p_n)^2} = 2e^{-\gamma} \approx 1.1229 \ldots$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.



RESUMEN Y ESTADO ACTUAL

- **¿Qué creemos?** Que las brechas máximas entre primos crecen como $(\log p_n)^2$. (La Conjetura de Cramér/Granville).
- **¿Qué sabemos?** Solo podemos probar que crecen más lento que $p_n^{0.525}$.
- **La brecha**: Sigue siendo una de las brechas más grandes entre la heurística y la prueba en toda la matemática.



¿POR QUÉ NOS IMPORTA ESTO?

Resolver esto no solo nos diría dónde “encontrar” el próximo primo, sino que revelaría la estructura fundamental y la verdadera naturaleza de la “aleatoriedad” de los números primos.

BIBLIOGRAFÍA

Cramér, H. (1936). On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arithmetica, 2(1), 23-46. https://doi.org/10.4064/aa-2-1-23-46

Baker, R. C., Harman, G., & Pintz, J. (2001). The difference between consecutive primes, II. Proceedings Of The London Mathematical Society, 83(3), 532-562. https://doi.org/10.1112/plms/83.3.532

Rankin, R. A. (1963). The Difference between Consecutive Prime Numbers V. Proceedings Of The Edinburgh Mathematical Society, 13(4), 331-332. https://doi.org/10.1017/s0013091500025633

Granville, A. (1995). Harald Cramér and the distribution of prime numbers. Scandinavian Actuarial Journal, 1995(1), 12-28. https://doi.org/10.1080/03461238.1995.10413946

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Shanks, D. (1964). On Maximal Gaps between Successive Primes. Mathematics Of Computation, 18(88), 646. https://doi.org/10.2307/2002951

Cadwell, J. H. (1971). Large intervals between consecutive primes. Mathematics Of Computation, 25(116), 909. https://doi.org/10.2307/2004355

Wolf, M. (2014). Nearest-neighbor-spacing distribution of prime numbers and quantum chaos. Physical Review E, 89(2), 022922. https://doi.org/10.1103/physreve.89.022922

Nicely, T. (1999). New maximal prime gaps and first occurrences. Mathematics Of Computation, 68(227), 1311-1315. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-99-01065-0

¡MUCHAS GRACIAS!

¿PREGUNTAS?

Ricardo Morales - 22289