La Función W de Lambert en Teoría de Números

Un Enfoque Analítico para Problemas Discretos

Mario Esteban Morales Montenegro

Seminario de Teoría de Números - UVG

22 de noviembre de 2025

El Problema: Ecuaciones "Imposibles"

¿Cómo despejamos x de las siguientes ecuaciones?

- $e^x = 10 \implies x = \ln(10)$ (*Inversa elemental*)

El Problema: Ecuaciones "Imposibles"

¿Cómo despejamos x de las siguientes ecuaciones?

- $e^x = 10 \implies x = \ln(10)$ (*Inversa elemental*)
- $xe^x = 10 \implies x = W_0(10)$ (*Requiere W*)

El Problema: Ecuaciones "Imposibles"

¿Cómo despejamos x de las siguientes ecuaciones?

- $e^x = 10 \implies x = \ln(10)$ (*Inversa elemental*)
- $xe^x = 10 \implies x = W_0(10)$ (*Requiere W*)
- $x^x = 10 \implies x = e^{W_0(\ln 10)}$ (*¡También requiere W!*)

El Problema: Ecuaciones ''Imposibles''

¿Cómo despejamos x de las siguientes ecuaciones?

- $e^x = 10 \implies x = \ln(10)$ (*Inversa elemental*)
- $xe^x = 10 \implies x = W_0(10)$ (*Requiere W*)
- $x^x = 10 \implies x = e^{W_0(\ln 10)}$ (*¡También requiere W!*)

La Necesidad de una Nueva Función

El álgebra, los logaritmos y las exponenciales no son suficientes. Para resolver $we^w = z$ (y otras ecuaciones trascendentales), necesitamos ''inventar'' la función inversa.

Definición Formal: $W(z)$ en $\mathbb{C}$

Definición

La función W de Lambert, $W(z)$, es una función multivaluada definida como la(s) solución(es) $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación:

$$we^w = z$$

- Es multivaluada porque su inversa, $f(w) = we^w$, no es inyectiva.

Definición Formal: $W(z)$ en $\mathbb{C}$

Definición

La función W de Lambert, $W(z)$, es una función multivaluada definida como la(s) solución(es) $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación:

$$we^w = z$$

- Es multivaluada porque su inversa, $f(w) = we^w$, no es inyectiva.
- $f'(w) = e^w(1 + w)$ tiene un punto crítico en $w = -1$.

Definición Formal: $W(z)$ en $\mathbb{C}$

Definición

La función W de Lambert, $W(z)$, es una función multivaluada definida como la(s) solución(es) $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación:

$$we^w = z$$

- Es multivaluada porque su inversa, $f(w) = we^w$, no es inyectiva.
- $f'(w) = e^w(1 + w)$ tiene un punto crítico en $w = -1$.
- Esto crea dos ramas inyectivas en $\mathbb{R}$, cuyas inversas son:
  - $W_0(z)$**:** Rama principal. (Rango: $[-1, \infty)$)
  - $W_{-1}(z)$**:** Rama secundaria. (Rango: $(-\infty, -1]$)

Definición Formal: $W(z)$ en $\mathbb{C}$

Definición

La función W de Lambert, $W(z)$, es una función multivaluada definida como la(s) solución(es) $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación:

$$we^w = z$$

- Es multivaluada porque su inversa, $f(w) = we^w$, no es inyectiva.
- $f'(w) = e^w(1 + w)$ tiene un punto crítico en $w = -1$.
- Esto crea dos ramas inyectivas en $\mathbb{R}$, cuyas inversas son:
  - **$W_0(z)$:** Rama principal. (Rango: $[-1, \infty)$)
  - **$W_{-1}(z)$:** Rama secundaria. (Rango: $(-\infty, -1]$)
- Todas las otras ramas (W_k para $k \neq 0, -1$) son puramente complejas.

Definición Formal: $W(z)$ en $\mathbb{C}$

Definición

La función W de Lambert, $W(z)$, es una función multivaluada definida como la(s) solución(es) $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación:

$$we^w = z$$

- Es multivaluada porque su inversa, $f(w) = we^w$, no es inyectiva.
- $f'(w) = e^w(1 + w)$ tiene un punto crítico en $w = -1$.
- Esto crea dos ramas inyectivas en $\mathbb{R}$, cuyas inversas son:
  - **$W_0(z)$:** Rama principal. (Rango: $[-1, \infty)$)
  - **$W_{-1}(z)$:** Rama secundaria. (Rango: $(-\infty, -1]$)
- Todas las otras ramas (W_k para $k \neq 0, -1$) son puramente complejas.
- $W_0(z)$ es la única rama **analítica** en $z = 0$, con serie de Maclaurin:

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n = z - z^2 + \frac{3}{2} z^3 - \dots$$

La Tesis: ¿Por qué en Teoría de Números?

"Aunque $W(z)$ es una función analítica (continua), es una herramienta indispensable para resolver problemas fundamentales en dominios discretos."

Exploraremos tres conexiones clave:

1. **Combinatoria:** $W(z)$ como Función Generatriz Exponencial.
2. **Teoría Analítica de Números:** $W(z)$ y la distribución de primos.
3. **Dinámica Discreta:** $W(z)$ y la convergencia de la tetración.

Contexto: Funciones Generatrices

Una Función Generatriz es un "código de barras" analítico para una secuencia discreta.

Función Generatriz Ordinaria (OGF)

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Se usa para problemas de **selección** (el orden no importa). *Ej: ¿De cuántas formas puedo dar 50 centavos con monedas?*

Función Generatriz Exponencial (EGF)

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Se usa para problemas con **objetos etiquetados** (el orden sí importa). *Ej: ¿Cuántas estructuras (árboles) puedo formar con n personas?*

Conexión 1: W como Función Generatriz

El Problema

Queremos contar t_n (árboles enraizados etiquetados con n vértices). La EGF es: $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^n}{n!}$

El Argumento Simbólico (Combinatoria Analítica)

Un árbol enraizado (T) se define recursivamente como:

$$T = (\text{Nodo Raíz}) \times (\text{Conjunto de Árboles})$$

Esto se traduce *directamente* a una ecuación de EGFs:

$$T(z) = z \cdot e^{T(z)}$$

Conexión 1: W como Función Generatriz

El Problema

Queremos contar t_n (árboles enraizados etiquetados con n vértices). La EGF es: $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^n}{n!}$

El Argumento Simbólico (Combinatoria Analítica)

Un árbol enraizado (T) se define recursivamente como:

$$T = (\text{Nodo Raíz}) \times (\text{Conjunto de Árboles})$$

Esto se traduce *directamente* a una ecuación de EGFs:

$$T(z) = z \cdot e^{T(z)}$$

La Conexión

¡Esta es la forma de $W(z)$! La solución es $T(z) = -W_0(-z)$.

Conexión 1: W como Función Generatriz

El Problema

Queremos contar t_n (árboles enraizados etiquetados con n vértices). La EGF es: $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^n}{n!}$

El Argumento Simbólico (Combinatoria Analítica)

Un árbol enraizado (T) se define recursivamente como:

$$T = (\text{Nodo Raíz}) \times (\text{Conjunto de Árboles})$$

Esto se traduce *directamente* a una ecuación de EGFs:

$$T(z) = z \cdot e^{T(z)}$$

La Conexión

¡Esta es la forma de $W(z)$! La solución es $T(z) = -W_0(-z)$. Ahora, probemos que esta ecuación implica $t_n = n^{n-1}$.

Prueba Rigurosa: Teorema de Inversión de Lagrange

Para encontrar los coeficientes de $T(z)$, usamos la Inversión de Lagrange.

Teorema (Inversión de Lagrange)

Si $y(z)$ está definida implícitamente por $y = z \cdot g(y)$, donde $y(0) = 0$ y $g(y)$ es analítica en $y = 0$ con $g(0) \neq 0$, entonces la expansión en serie de potencias de y es:

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

donde los coeficientes c_n están dados por:

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (g(t))^n \right]_{t=0}$$

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^{y}$.

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^y$.
2. **Aplicamos la fórmula** para $c_n = \frac{t_n}{n!}$:

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (e^t)^n \right]_{t=0}$$

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^y$.
2. **Aplicamos la fórmula** para $c_n = \frac{t_n}{n!}$:

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^t)^n\right]_{t=0}$$

3. **Simplificamos:**

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt}\right]_{t=0}$$

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^y$.
2. **Aplicamos la fórmula** para $c_n = \frac{t_n}{n!}$:

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^t)^n\right]_{t=0}$$

3. **Simplificamos:**

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt}\right]_{t=0}$$

4. **Derivamos** $(n-1)$ **veces:**

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt} = n^{n-1}e^{nt}$$

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^y$.
2. **Aplicamos la fórmula** para $c_n = \frac{t_n}{n!}$:

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^t)^n\right]_{t=0}$$

3. **Simplificamos:**

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt}\right]_{t=0}$$

4. **Derivamos** $(n-1)$ **veces:**

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt} = n^{n-1}e^{nt}$$

5. **Evaluamos en** $t = 0$:

$$\left[n^{n-1}e^{nt}\right]_{t=0} = n^{n-1}e^0 = n^{n-1}$$

Prueba Rigurosa: Aplicación

1. **Nuestro caso:** $T(z) = ze^{T(z)}$. Dejamos $y = T(z)$ y $g(y) = e^y$.
2. **Aplicamos la fórmula** para $c_n = \frac{t_n}{n!}$:
$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^t)^n\right]_{t=0}$$
3. **Simplificamos:**
$$\frac{t_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt}\right]_{t=0}$$
4. **Derivamos** $(n-1)$ **veces:**
$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt} = n^{n-1}e^{nt}$$
5. **Evaluamos en** $t = 0$:
$$\left[n^{n-1}e^{nt}\right]_{t=0} = n^{n-1}e^0 = n^{n-1}$$

Conexión 2: $W(z)$ y los Números Primos

El Problema

El Teorema de los Números Primos (PNT) nos da una aproximación para $\pi(x)$, la cantidad de primos $\leq x$:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Problema Inverso: ¿Cuál es el tamaño aproximado del n-ésimo primo, p_n?

- Debemos "invertir" $n \approx p_n / \ln(p_n)$ para despejar p_n.

Conexión 2: $W(z)$ y los Números Primos

El Problema

El Teorema de los Números Primos (PNT) nos da una aproximación para $\pi(x)$, la cantidad de primos $\leq x$:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Problema Inverso: ¿Cuál es el tamaño aproximado del n-ésimo primo, p_n?

- Debemos "invertir" $n \approx p_n / \ln(p_n)$ para despejar p_n.
- Esto es algebraicamente imposible con funciones elementales.

Conexión 2: $W(z)$ y los Números Primos

El Problema

El Teorema de los Números Primos (PNT) nos da una aproximación para $\pi(x)$, la cantidad de primos $\leq x$:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Problema Inverso: ¿Cuál es el tamaño aproximado del n-ésimo primo, p_n?

- Debemos "invertir" $n \approx p_n / \ln(p_n)$ para despejar p_n.
- Esto es algebraicamente imposible con funciones elementales.
- La solución a la ecuación $n = x / \ln x$ (¡no una aproximación!) está dada por $W(z)$.

La Fórmula

Usando la rama W_{-1}, la aproximación para p_n es:

$$p_n \approx -n \cdot W_{-1} \left(-\frac{1}{\right.$$

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula $f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula $f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %
100	541	582.6	7.7 %

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula $f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %
100	541	582.6	7.7 %
1,000	7,919	8,118.4	2.5 %

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula
$f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %
100	541	582.6	7.7 %
1,000	7,919	8,118.4	2.5 %
10,000	104,729	106,152.4	1.3 %

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula
$f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %
100	541	582.6	7.7 %
1,000	7,919	8,118.4	2.5 %
10,000	104,729	106,152.4	1.3 %
100,000	1,299,709	1,311,335.7	0.89 %

Conexión 2: ¿Qué tan buena es la aproximación?

Comparemos el valor real de p_n con nuestra fórmula $f(n) = -n \cdot W_{-1}(-1/n)$.

n	p_n **(Primo Real)**	**Aprox.** $f(n)$	**Error Rel.**
10	29	35.29	21.7 %
100	541	582.6	7.7 %
1,000	7,919	8,118.4	2.5 %
10,000	104,729	106,152.4	1.3 %
100,000	1,299,709	1,311,335.7	0.89 %
1,000,000	15,485,863	15,611,104	0.81 %

Observación

La fórmula basada en $W(z)$ no solo funciona, sino que es una aproximación asintótica excelente, superando a $p_n \approx n \ln n$.

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la "torre de potencias" infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la "torre de potencias" infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.
- Podemos reescribir esto como $y^{1/y} = x$.

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la ''torre de potencias'' infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.
- Podemos reescribir esto como $y^{1/y} = x$.
- **Pregunta:** ¿Cuál es el rango de $f(y) = y^{1/y}$?

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la "torre de potencias" infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.
- Podemos reescribir esto como $y^{1/y} = x$.
- **Pregunta:** ¿Cuál es el rango de $f(y) = y^{1/y}$?
- Usando cálculo (derivación implícita), encontramos que $f(y)$ tiene un máximo global en $y = e$.
- El valor máximo es $f(e) = e^{1/e}$.

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la "torre de potencias" infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.
- Podemos reescribir esto como $y^{1/y} = x$.
- **Pregunta:** ¿Cuál es el rango de $f(y) = y^{1/y}$?
- Usando cálculo (derivación implícita), encontramos que $f(y)$ tiene un máximo global en $y = e$.
- El valor máximo es $f(e) = e^{1/e}$.
- El valor mínimo (para $y > 0$) es $f(1/e) = (1/e)^e = e^{-e}$.

Conexión 3: El Límite de la Tetración

El Problema (Euler, 1780)

Consideremos la "torre de potencias" infinita, o tetración:

$$y = x^{x^{x^{\cdots}}}$$

¿Para qué valores de x converge esta expresión?

- Si la torre converge a y, entonces y debe satisfacer $y = x^y$.
- Podemos reescribir esto como $y^{1/y} = x$.
- **Pregunta:** ¿Cuál es el rango de $f(y) = y^{1/y}$?
- Usando cálculo (derivación implícita), encontramos que $f(y)$ tiene un máximo global en $y = e$.
- El valor máximo es $f(e) = e^{1/e}$.
- El valor mínimo (para $y > 0$) es $f(1/e) = (1/e)^e = e^{-e}$.
- **Respuesta de Euler:** La tetración converge si y solo si $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$.

$$[0{,}0659\ldots, 1{,}4446\ldots]$$

Conexión 3: $W(z)$ Resuelve la Tetración

Resolviendo $y = x^y$

¿Cómo despejamos y de $y = x^y$?

1. $\ln(y) = y\ln(x)$
2. $1 = \frac{y\ln(x)}{\ln(y)} \implies \frac{\ln(y)}{y} = \ln(x)$

Conexión 3: $W(z)$ Resuelve la Tetración

Resolviendo $y = x^y$

¿Cómo despejamos y de $y = x^y$?

1. $\ln(y) = y \ln(x)$
2. $1 = \frac{y \ln(x)}{\ln(y)} \implies \frac{\ln(y)}{y} = \ln(x)$
3. Sea $y = e^{-u} \implies \ln(y) = -u$
4. $\frac{-u}{e^{-u}} = \ln(x) \implies -ue^{u} = \ln(x)$

Conexión 3: $W(z)$ Resuelve la Tetración

Resolviendo $y = x^y$

¿Cómo despejamos y de $y = x^y$?

1. $\ln(y) = y\ln(x)$
2. $1 = \frac{y\ln(x)}{\ln(y)} \implies \frac{\ln(y)}{y} = \ln(x)$
3. Sea $y = e^{-u} \implies \ln(y) = -u$
4. $\frac{-u}{e^{-u}} = \ln(x) \implies -ue^{u} = \ln(x)$
5. $ue^{u} = -\ln(x)$

Conexión 3: $W(z)$ Resuelve la Tetración

Resolviendo $y = x^y$

¿Cómo despejamos y de $y = x^y$?

1. $\ln(y) = y\ln(x)$
2. $1 = \frac{y\ln(x)}{\ln(y)} \implies \frac{\ln(y)}{y} = \ln(x)$
3. Sea $y = e^{-u} \implies \ln(y) = -u$
4. $\frac{-u}{e^{-u}} = \ln(x) \implies -ue^u = \ln(x)$
5. $ue^u = -\ln(x)$
6. ¡Por definición! $u = W_k(-\ln x)$

Conexión 3: $W(z)$ Resuelve la Tetración

Resolviendo $y = x^y$

¿Cómo despejamos y de $y = x^y$?

1. $\ln(y) = y \ln(x)$
2. $1 = \frac{y \ln(x)}{\ln(y)} \implies \frac{\ln(y)}{y} = \ln(x)$
3. Sea $y = e^{-u} \implies \ln(y) = -u$
4. $\frac{-u}{e^{-u}} = \ln(x) \implies -ue^{u} = \ln(x)$
5. $ue^{u} = -\ln(x)$
6. ¡Por definición! $u = W_k(-\ln x)$
7. Deshaciendo el cambio: $y = e^{-u} = e^{-W_k(-\ln x)}$

La Solución Completa

Las soluciones a la ecuación de la tetración son:

$$y = \frac{W_k(-\ln x)}{-\ln x}$$

La convergencia (y las múltiples soluciones, ej. $x = \sqrt[4]{4}$) se explican por las

Conclusión

Hemos visto que la función $W(z)$, aunque definida analíticamente:

1. **Es la Función Generatriz** de la secuencia combinatoria $t_n = n^{n-1}$, lo cual probamos usando Inversión de Lagrange.

Conclusión

Hemos visto que la función $W(z)$, aunque definida analíticamente:

1. **Es la Función Generatriz** de la secuencia combinatoria $t_n = n^{n-1}$, lo cual probamos usando Inversión de Lagrange.
2. **Provee una Aproximación Cerrada** para el n-ésimo primo p_n, con una precisión empírica notable.

Conclusión

Hemos visto que la función $W(z)$, aunque definida analíticamente:

1. **Es la Función Generatriz** de la secuencia combinatoria $t_n = n^{n-1}$, lo cual probamos usando Inversión de Lagrange.
2. **Provee una Aproximación Cerrada** para el n-ésimo primo p_n, con una precisión empírica notable.
3. **Define el Rango de Convergencia** del problema clásico de la tetración infinita, $x^{x^{x^{\cdots}}}$, y provee sus soluciones.

Veredicto

$W(z)$ no es una simple curiosidad de cálculo; es una función fundamental que actúa como un puente directo entre el análisis y problemas centrales de la teoría de números.

¡Gracias!

¿Preguntas?

Referencia Principal

Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E. (1996).
On the Lambert W function.
Advances in Computational Mathematics, 5(1), 329-359.