La función zeta de Riemann:
de Euler al Teorema de los Números Primos

Emilio Reyes

Seminario 1: Teoría de Números

18 de noviembre de 2025

Pregunta central

¿Qué queremos entender?

- ¿Cómo se distribuyen los números primos entre los enteros?
- ¿Cuántos primos hay antes de un número grande x?

Pregunta central

¿Qué queremos entender?

- ¿Cómo se distribuyen los números primos entre los enteros?
- ¿Cuántos primos hay antes de un número grande x?

Idea clave de la charla

Los primos, que son objetos discretos, pueden estudiarse mediante la función zeta de Riemann, una función analítica inicialmente introducida por Euler y profundizada por Riemann.

Definición de la función zeta (Euler)

Para $s > 1$ definimos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Definición de la función zeta (Euler)

Para $s > 1$ definimos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Observaciones básicas

- Para $s > 1$ la serie converge (por p–serie).
- La función es positiva y decreciente en s real.

Del producto geométrico al producto de Euler

Recordemos la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1).$$

Del producto geométrico al producto de Euler

Recordemos la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1).$$

Tomando $x = p^{-s}$ para un primo p y $s > 1$:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots .$$

Del producto geométrico al producto de Euler

Recordemos la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1).$$

Tomando $x = p^{-s}$ para un primo p y $s > 1$:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots .$$

Multiplicando sobre todos los primos:

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots\right).$$

Del producto geométrico al producto de Euler

Recordemos la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1).$$

Tomando $x = p^{-s}$ para un primo p y $s > 1$:

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots .$$

Multiplicando sobre todos los primos:

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots\right).$$

Al expandir este producto, aparece exactamente una vez cada término $1/n^s$, gracias a la factorización única de n en primos.

Producto de Euler

Teorema (Euler)

Para $s > 1$ se cumple

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Producto de Euler

Teorema (Euler)

Para $s > 1$ se cumple

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- El lado izquierdo no menciona primos; sólo suma sobre todos los enteros.
- El lado derecho es un producto que sí involucra explícitamente a todos los primos.
- Esta identidad es el primer gran puente entre teoría de números y análisis.

Aplicación: otra demostración de que hay infinitos primos

- Sabemos que $\zeta(s)$ diverge cuando $s \to 1^+$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \longrightarrow \infty.$$

Aplicación: otra demostración de que hay infinitos primos

- Sabemos que $\zeta(s)$ diverge cuando $s \to 1^+$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \longrightarrow \infty.$$

- Supongamos que hubiera sólo finitos primos. Entonces el producto de Euler

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

sería un producto finito de términos acotados cuando $s \to 1^+$, por lo que tendría límite finito.

Aplicación: otra demostración de que hay infinitos primos

- Sabemos que $\zeta(s)$ diverge cuando $s \to 1^+$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \longrightarrow \infty.$$

- Supongamos que hubiera sólo finitos primos. Entonces el producto de Euler

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

  sería un producto finito de términos acotados cuando $s \to 1^+$, por lo que tendría límite finito.
- Pero por el Teorema de Euler,

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

  la izquierda diverge y la derecha sería finita: contradicción.

Valores especiales de $\zeta(s)$

Euler mostró que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

donde B_{2n} son los números de Bernoulli.

Valores especiales de $\zeta(s)$

Euler mostró que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

donde B_{2n} son los números de Bernoulli.

Ejemplos

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Valores especiales de $\zeta(s)$

Euler mostró que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

donde B_{2n} son los números de Bernoulli.

Ejemplos

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

- Se sabe que $\zeta(2n)$ siempre es un múltiplo racional de π^{2n}.
- Apéry (1978) probó que $\zeta(3)$ es irracional; para otros valores impares la situación sigue abierta.

La función $\pi(x)$ que cuenta primos

Definimos

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo} : p \leq x\}.$$

La función $\pi(x)$ que cuenta primos

Definimos

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo} : p \leq x\}.$$

¿Podemos encontrar una expresión sencilla que describa cómo crece $\pi(x)$ cuando x es grande?

La función $\pi(x)$ que cuenta primos

Definimos

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo} : p \leq x\}.$$

¿Podemos encontrar una expresión sencilla que describa cómo crece $\pi(x)$ cuando x es grande?

- **Legendre** (1798): propuso

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}.$$

- **Gauss** (1792–1800): sugirió que

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

Tabla comparativa (ejemplo)

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	$\mathrm{Li}(x)$
10^3	168	172	178
10^6	78 498	78 543	78 628
10^8	5 764 455	5 768 004	5 762 209

Ambas funciones aproximan bastante bien a $\pi(x)$, pero no son exactas. La pregunta es: ¿qué tan grande puede ser el error?

Teorema de los Números Primos (PNT)

El Teorema de los Números Primos afirma que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

es decir,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

Teorema de los Números Primos (PNT)

El Teorema de los Números Primos afirma que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

es decir,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

- Da la ley media de la distribución de los primos.
- Fue demostrado en 1896 por Hadamard y de la Vallée Poussin usando análisis complejo y, en particular, propiedades de la función zeta de Riemann.

Extensión de ζ al plano complejo

Riemann considera $\zeta(s)$ para $s = a + bi$ complejo.

Extensión de ζ al plano complejo

Riemann considera $\zeta(s)$ para $s = a + bi$ complejo.

Ecuación funcional de Riemann

Usando análisis complejo y la función gamma, Riemann obtiene

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Extensión de ζ al plano complejo

Riemann considera $\zeta(s)$ para $s = a + bi$ complejo.

Ecuación funcional de Riemann

Usando análisis complejo y la función gamma, Riemann obtiene

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

Consecuencias

- $\zeta(s)$ se extiende meromórficamente a todo $\mathbb{C}$, con un único polo simple en $s = 1$.
- La ecuación funcional refleja una simetría respecto a la línea $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Ceros de la función zeta

Dos tipos de ceros

- **Triviales**: $s = -2, -4, -6, \ldots$ (provienen del factor $\sin(\pi s/2)$).
- **No triviales**: se encuentran dentro de la banda crítica

$$0 < \Re(s) < 1.$$

Ceros de la función zeta

Dos tipos de ceros

- **Triviales**: $s = -2, -4, -6, \ldots$ (provienen del factor $\sin(\pi s/2)$).
- **No triviales**: se encuentran dentro de la banda crítica

$$0 < \Re(s) < 1.$$

Hipótesis de Riemann (HR)

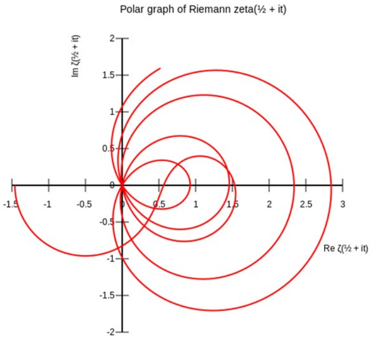
Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ satisfacen

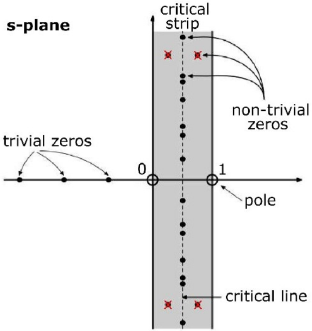
$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

Figura: banda crítica y línea crítica

Los ceros de la función zeta de Riemann

https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Zeta_polar.svg





https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=74714

Idea: la HR afirma que todos los ceros no triviales (puntos negros) están sobre la línea $\Re(s) = \frac{1}{2}$ dentro de la banda $0 < \Re(s) < 1$.

Ceros no triviales iniciales

Los primeros ceros no triviales tienen la forma

$$\rho_k = \frac{1}{2} + it_k,$$

donde, aproximadamente,

$$\begin{aligned} &t_1 \approx 14{,}1347, \quad t_2 \approx 21{,}0220, \quad t_3 \approx 25{,}0109, \\ &t_4 \approx 30{,}4249, \quad t_5 \approx 32{,}9351, \quad \ldots \end{aligned}$$

Ceros no triviales iniciales

Los primeros ceros no triviales tienen la forma

$$\rho_k = \frac{1}{2} + it_k,$$

donde, aproximadamente,

$$\begin{array}{lll} t_1 \approx 14{,}1347, & t_2 \approx 21{,}0220, & t_3 \approx 25{,}0109, \\ t_4 \approx 30{,}4249, & t_5 \approx 32{,}9351, & \ldots \end{array}$$

- Se han calculado numéricamente millones de ceros y todos aparecen sobre la línea crítica.
- A pesar de esta evidencia, no existe una demostración general de la HR ni se conocen contraejemplos.

Error en el Teorema de los Números Primos

El PNT dice que $\pi(x)$ se comporta como $x/\log x$ o $\mathrm{Li}(x)$, pero no nos dice exactamente qué tan grande es el error.

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x).$$

Error en el Teorema de los Números Primos

El PNT dice que $\pi(x)$ se comporta como $x/\log x$ o $\mathrm{Li}(x)$, pero no nos dice exactamente qué tan grande es el error.

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x).$$

Teorema general

Sea β el supremo de las partes reales de los ceros no triviales de $\zeta(s)$. Entonces

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\left(x^{\beta} \log x\right).$$

Error en el Teorema de los Números Primos

El PNT dice que $\pi(x)$ se comporta como $x/\log x$ o $\mathrm{Li}(x)$, pero no nos dice exactamente qué tan grande es el error.

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x).$$

Teorema general

Sea β el supremo de las partes reales de los ceros no triviales de $\zeta(s)$. Entonces

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\left(x^{\beta} \log x\right).$$

Bajo la Hipótesis de Riemann

Si HR es cierta, entonces $\beta = \frac{1}{2}$ y el error mejora a

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\sqrt{x} \log x\right).$$

Interpretación del término de error

- La notación $O(\cdot)$ (*"O grande"*) indica el orden de crecimiento del error cuando $x \to \infty$.
- Decir que

$$E(x) = O(\sqrt{x}\log x)$$

significa que, para x grande, el error $E(x)$ no crece más rápido que alguna constante por $\sqrt{x}\log x$.

Interpretación del término de error

- La notación $O(\cdot)$ (*"O grande"*) indica el orden de crecimiento del error cuando $x \to \infty$.
- Decir que
$$E(x) = O(\sqrt{x}\log x)$$
significa que, para x grande, el error $E(x)$ no crece más rápido que alguna constante por $\sqrt{x}\log x$.
- Comparado con la escala de $\pi(x) \approx x/\log x$, este error es relativamente pequeño: la HR implicaría una estimación extremadamente precisa de cuántos primos hay antes de x.

Otras consecuencias típicas de la HR

Bajo la Hipótesis de Riemann se pueden demostrar afirmaciones del tipo:

- Existe al menos un primo entre x y $x + C\sqrt{x}\log x$ para x suficientemente grande.
- Cotas refinadas para las funciones de Tchebycheff $\vartheta(x)$ y $\psi(x)$.
- Mejoras en resultados sobre brechas entre primos y sobre primos en progresiones aritméticas.

Otras consecuencias típicas de la HR

Bajo la Hipótesis de Riemann se pueden demostrar afirmaciones del tipo:

- Existe al menos un primo entre x y $x + C\sqrt{x}\log x$ para x suficientemente grande.
- Cotas refinadas para las funciones de Tchebycheff $\vartheta(x)$ y $\psi(x)$.
- Mejoras en resultados sobre brechas entre primos y sobre primos en progresiones aritméticas.

Moral: la HR no es sólo una curiosidad; tiene efectos concretos en muchos problemas de teoría de números.

Estado actual de la Hipótesis de Riemann

- La HR fue propuesta en 1859 y **sigue abierta**.
- No se ha demostrado ni refutado.
- Millones de ceros han sido verificados numéricamente y todos satisfacen $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
- Existen resultados parciales que muestran que "casi todos" los ceros están muy cerca de la línea crítica.

Estado actual de la Hipótesis de Riemann

- La HR fue propuesta en 1859 y **sigue abierta**.
- No se ha demostrado ni refutado.
- Millones de ceros han sido verificados numéricamente y todos satisfacen $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
- Existen resultados parciales que muestran que "casi todos" los ceros están muy cerca de la línea crítica.

Sigue siendo uno de los problemas más importantes y famosos de las matemáticas modernas (aparece en la lista de los Problemas del Milenio).

Preguntas

¡Gracias por la atención!

¿Preguntas o comentarios?