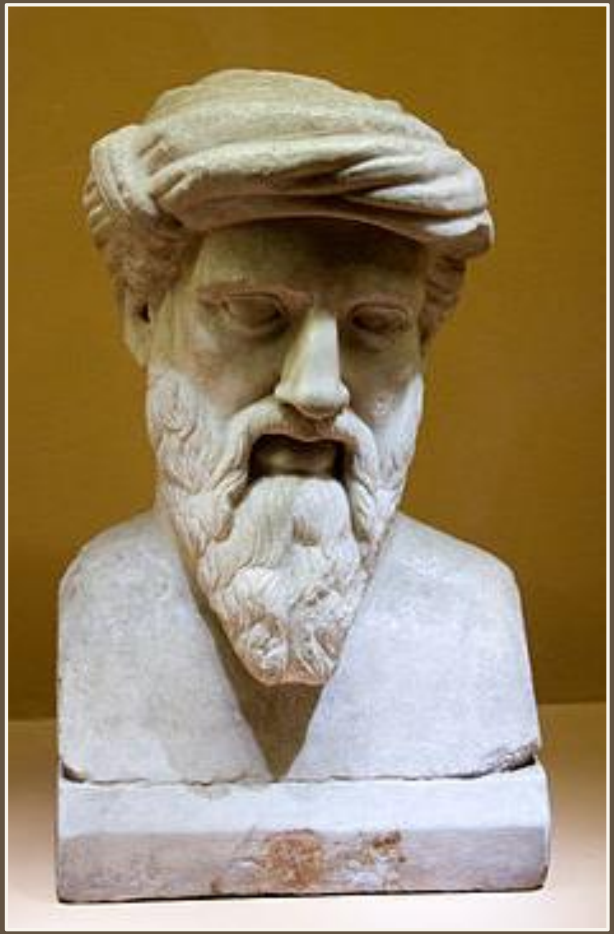
ECUACIONES DIOFÁNTICAS I:

TERNAS PITAGÓRICAS

Ricardo Morales - 22289

AGENDA

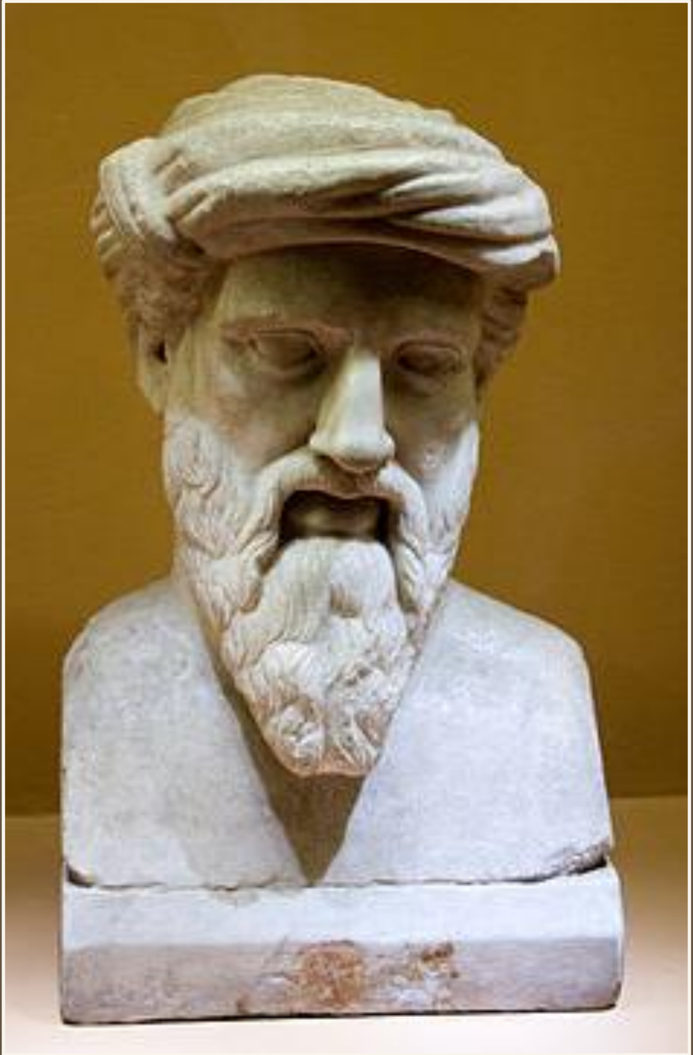
Pitágoras de Samos



570–495 a. C. Busto romano (copia), Museos Capitolinos. Foto: Dominio público.

CONTEXTO HISTÓRICO

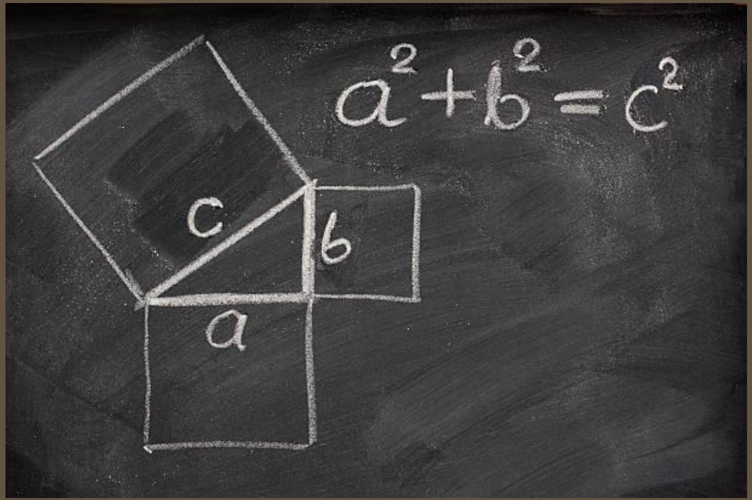
- Filósofo-matemático griego; fundó la escuela pitagórica en Crotona (comunidad con reglas y estudio del número).
- Interés por la aritmética y la armonía (proporciones musicales).
- Tradición pitagórica: rigor geométrico y gusto por la demostración; contexto que enmarca el problema de las ternas pitagóricas.
- Dato curioso: el descubrimiento de los inconmensurables (irracionales) sacudió la visión pitagórica de número, impulsando refinamientos teóricos.



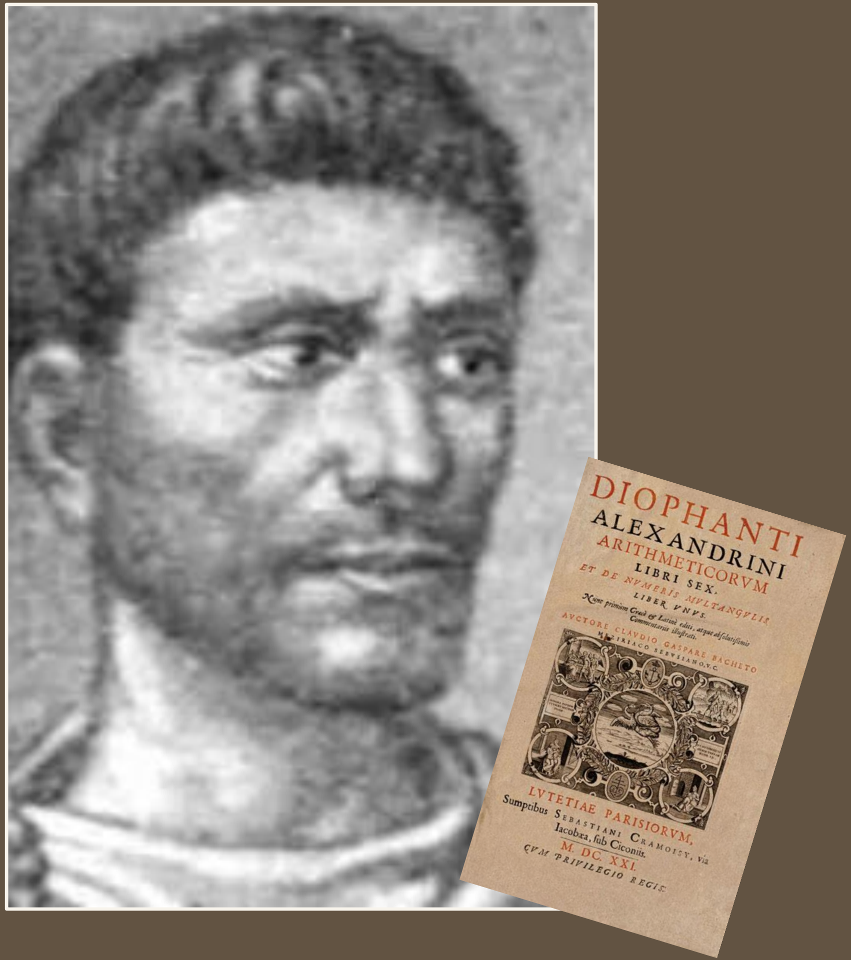
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$x^2 + y^2 = z^2$$

"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos (los lados más cortos que forman el ángulo recto) es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa".



Diofanto de Alejandría



200–284 d. C. Retrato tradicional.
Foto: Dominio público.

- Autor de la *Arithmetica*, obra clave en problemas con soluciones racionales/enteras.
- Considerado “padre” de la aritmética diofántica: enfoque sistemático para resolver ecuaciones en enteros.
- Introdujo notación abreviada (álgebra “sincopada”) y métodos constructivos de solución.
- Relevancia directa: el espíritu diofántico es “describir todas las soluciones” (no solo exhibir una), objetivo central con las ternas pitagóricas.
- Conexión histórica famosa: el margen de Fermat en su edición de *Arithmetica* (germen del Último Teorema de Fermat).

Algunos conceptos básicos

… por si no se acuerdan

Definición: Una **ecuación diofántica** es una ecuación (o sistema de ecuaciones) polinómica con coeficientes enteros en variables $x_1, \dots, x_n$ en la que se buscan soluciones enteras (típicamente en $\mathbb{Z}$, a veces en $\mathbb{Z}_{>0}$ o en $\mathbb{Q}$).

Teorema (**Pitágoras**): En un triángulo rectángulo del plano euclidiano, con catetos de longitudes a, b e hipotenusa c, $c^2 = a^2 + b^2$.

Definición: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, un **máximo común divisor** (MCD) de a y b es un entero positivo d que satisface

1. $d|a$ & $d|b$
2. $k|d$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k|a$ y $k|b$.

Propiedad: Si ab es cuadrado y $mcd(a, b) = 1$, entonces a y b son cuadrados.

CONCEPTOS PRINCIPALES

Definición: A la tripla de números enteros positivos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tales que $x, y, z > 0$, que satisfacen la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ se les llama triplas o **ternas pitagóricas**.

Ejemplos:

1. $(3,4,5) \rightarrow 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
2. $(5,12,13) \rightarrow 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.
3. $(6,8,10) \rightarrow 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$.

CONCEPTOS PRINCIPALES

Definición: A la tripla de números enteros positivos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tales que $x, y, z > 0$, que satisfacen la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ se les llama triplas o **ternas pitagóricas**.

Ejemplos:
1. $(3,4,5) \rightarrow 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
2. $(5,12,13) \rightarrow 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.
3. $(6,8,10) \rightarrow 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$.

Definición: Una terna pitagórica es primitiva si $mcd(x, y, z) = 1$.

Ahora bien, ¡PREGUNTA!

AHORA BIEN, ¡PREGUNTA!

¿CREEN QUE PODEMOS GENERAR ESTAS TERNAS SIN NECESIDAD DE PROBAR NÚMERO POR NÚMERO?

Respuesta corta…

Respuesta corta…

¡SÍ!

Respuesta corta…

¡SÍ!

Sin embargo…

Respuesta corta…

¡SÍ!

Sin embargo… hay que demostrarlo.

EMPECEMOS CON LA SUPOSICIÓN SIGUIENTE:

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Objetivo: ¿Qué información podemos sacar de x, y, z sabiendo que estos forman una terna pitagórica?

A partir de aquí podemos empezar a hacer algunas preguntas.

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Pregunta 1: ¿Es posible que x & y sean ambos pares?

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Pregunta 1: ¿Es posible que x & y sean ambos pares?

¡NO!

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Pregunta 1: ¿Es posible que x & y sean ambos pares?

¡NO!

Pregunta 2: ¿Es posible que x & y sean ambos impares?

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Pregunta 1: ¿Es posible que x & y sean ambos pares?

¡NO!

Pregunta 2: ¿Es posible que x & y sean ambos impares?

¡NO!

Suposición: Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva.

Es así como terminamos con las siguientes expresiones:

$$x = p^2 - q^2$$
$$y = 2pq$$
$$z = p^2 + q^2$$

<u>Teorema</u>: Si (x, y, z) es una terna pitagórica primitiva, entonces existe coprimos $p, q \in \mathbb{N}$, donde uno es par y el otro es impar tales que

$$x = p^2 - q^2$$
$$y = 2pq$$
$$z = p^2 + q^2$$

MIREMOS ALGUNOS EJEMPLOS

BIBLIOGRAFÍA

3Blue1Brown. (2017, 26 mayo). All possible pythagorean triples, visualized [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=QJYmyhnaaek

Agarwal, R. P. (2020). Pythagorean Triples before and after Pythagoras. Computation, 8(3), 62. https://doi.org/10.3390/computation8030062

Burton, D. (2010). Elementary number Theory. McGraw-Hill Education.

colaboradores de Wikipedia. (2025a, mayo 26). Diofanto de Alejandría - Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandr%C3%ADa

colaboradores de Wikipedia. (2025, 13 septiembre). Pitágoras. Wikipedia, la Enciclopedia Libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras

Michael Penn. (2019, 28 agosto). Number Theory | Primitive Pythagorean triples [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=F3dR41ItmSg

¡MUCHAS GRACIAS!

Ricardo Morales - 22289