Fracciones Continuas

Octubre 2025

Micaela Yataz

Universidad del Valle de Guatemala

Ejemplo 1

Rectángulo de lado 51 x 19:

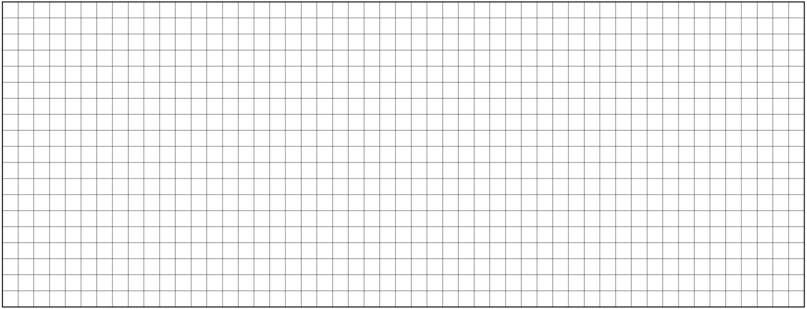

Figura: Rectángulo 51 x 19

Ejemplo 1

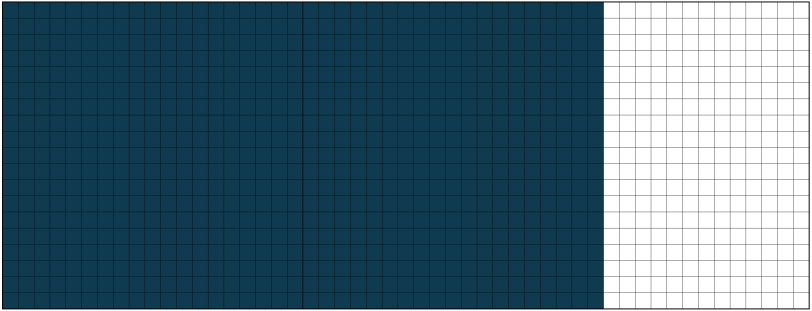

Figura: 2 cuadrados de 19×19

Ejemplo 1

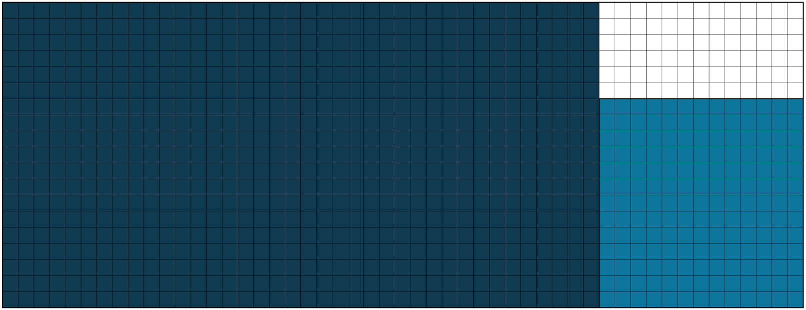

Figura: 1 cuadrado de 13×13

Ejemplo 1

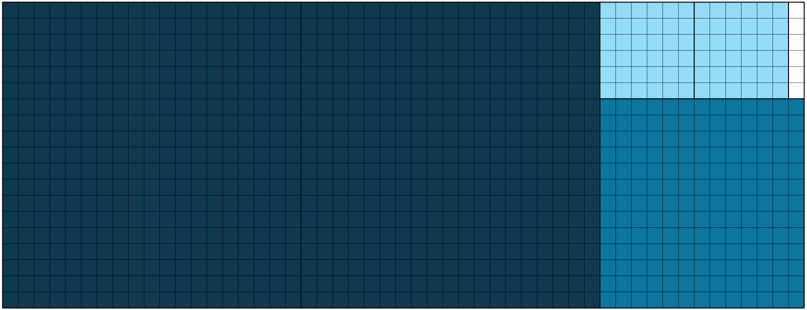

Figura: 2 cuadrados de 6×6

Ejemplo 1

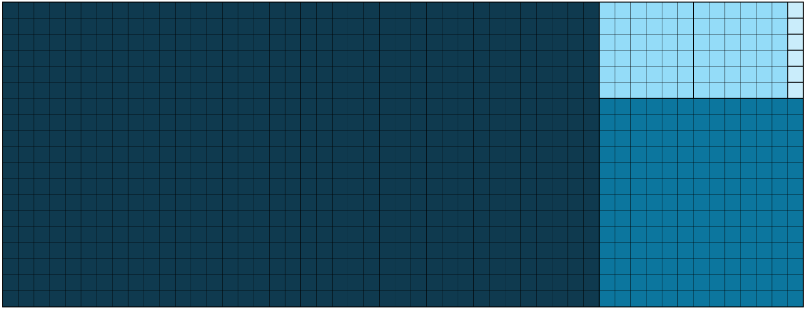

Figura: 6 cuadrados de 1×1

Ejemplo 1

Hemos dividido un rectángulo de 51×19 en:

- 2 cuadrados de 19×19
- 1 cuadrado de 13×13
- 2 cuadrados de 6×6
- 6 cuadrados de 1×1

Ejemplo 1

Tambien se puede representar de esta forma:

$$\frac{19}{51} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}$$

Definición 1

Una **fracción continua finita** se entiende como una fracción de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

donde a_0 es un número real no negativo y $a_1, \ldots, a_n$ son reales. Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los denominadores parciales de la fracción. La fracción se llama **simple** si todos los a_i son enteros.

Ejemplo 2

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

se puede condensar al valor de $\frac{170}{53}$:

Ejemplo 2

Veamos como se desarrolla:

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}} = 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{9}{2}}}}$$

$$= 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{2}{9}}}$$

$$= 3+\cfrac{1}{4+\frac{9}{11}}$$

$$= 3+\frac{11}{53}$$

$$= \frac{170}{53}$$

Teorema 1

Cualquier número racional puede escribirse como una fracción continua simple finita.

Demostración de Teorema 1

Sea a/b, donde $b > 0$, un número racional arbitrario. El algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de a y b nos da las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a &= ba_0 + r_1 & 0 < r_1 < b \\
b &= r_1 a_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 a_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n a_n + 0
\end{aligned}
$$

Demostración de Teorema 1

Reescribamos las ecuaciones del algoritmo de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n$$

Demostración de Teorema 1

Si usamos la segunda de estas ecuaciones para eliminar $\frac{b}{r_1}$ de la primera ecuación, entonces

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

En este resultado, sustituyamos el valor de $\frac{r_1}{r_2}$ como se da en la tercera ecuación:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

Demostración de Teorema 1

Continuando de esta manera, se obtiene:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

$\square$

Ejemplo 1

Aquí el algoritmo de Euclides conecta todo lo que hemos hecho.

$$
\begin{aligned}
51 &= 2\cdot 19+13 &\quad \text{o} \quad & \frac{51}{19} = 2+\frac{13}{19}\\
19 &= 1\cdot 13+6 &\quad \text{o} \quad & \frac{19}{13} = 1+\frac{6}{13}\\
13 &= 2\cdot 6+1 &\quad \text{o} \quad & \frac{13}{6} = 2+\frac{1}{6}\\
6 &= 6\cdot 1+0 &\quad \text{o} \quad & \frac{6}{6} = 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Haciendo las sustituciones apropiadas:

$$\frac{19}{51} = \frac{1}{\frac{51}{19}} = \frac{1}{2+\frac{13}{19}}$$

$$= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{19}{13}}}$$

$$= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{6}{13}}}$$

$$= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{13}{6}}}}$$

$$= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{6}}}}$$

Notación

Una forma practica de escribir las fracciones continuas finitas, mostrando sus **cocientes parciales**, es de la forma siguiente:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

Para $\frac{19}{51}$ se indica con

$$[0; 2, 1, 2, 6]$$

Si la fracción a representar es positiva y menor que 1, entonces $a_0 = 0$. Se puede modificar el último término.

- Si $a_n > 1$, entonces

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$$

  donde $a_n - 1$ es un entero positivo; por lo tanto,

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1]$$

Notación

- Si $a_n = 1$, entonces

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1$$

de modo que

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

Todo número racional tiene dos representaciones como una fracción continua simple, una con un número par de denominadores parciales y otra con un número impar (estas son las únicas dos representaciones).

Ejemplo 3

Consideremos el cociente de dos números sucesivos de Fibonacci (u_{n+1}/u_n) escrito como una fracción continua simple. Como se señaló anteriormente, el algoritmo de Euclides para el máximo común divisor de u_n y u_{n+1} produce las $n-1$ ecuaciones.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 \cdot u_n + u_{n-1} \\ u_n &= 1 \cdot u_{n-1} + u_{n-2} \\ &\vdots \\ u_4 &= 1 \cdot u_3 + u_2 \\ u_3 &= 2 \cdot u_2 + 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Debido a que los cocientes generados por el algoritmo se convierten en los denominadores parciales de la fracción continua, podemos escribir

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = [1; 1, 1, \ldots, 1, 2]$$

Pero u_{n+1}/u_n también está representado por una fracción continua que tiene un denominador parcial más que $[1; 1, \ldots, 1, 2]$; a saber,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = [1; 1, 1, \ldots, 1, 1]$$

donde el entero 1 aparece n veces. Por lo tanto, la fracción u_{n+1}/u_n tiene una expansión en fracción continua que es muy fácil de describir: Hay $n-1$ denominadores parciales todos iguales a 1.

Definicion 2

La fracción continua formada a partir de $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ al cortar la expansión después del k-ésimo denominador parcial a_k se llama el **k-ésimo convergente de la fracción continua** y se denota por C_k; en símbolos,

$$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] \quad 1 \leq k \leq n$$

Sea el convergente cero C_0 igual al número a_0.

Nota

Un punto para destacar es que para obtener el siguiente convergente

$$C_{k+1}$$

se realiza una sustitución en el ultimo denominador parcial.

- En el convergente $C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, a_0 es un entero.
- Para obtener $C_{k+1,}$ se remplaza a_k por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$

$$C_{m+1} = \left[a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right]$$

Ejemplo 1

Volviendo a nuestro ejemplo $19/51 = [0;\ 2,\ 1,\ 2,\ 6]$, los convergentes sucesivos son

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = [0;2] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = [0;2,1] = 0 + \frac{1}{2+\frac{1}{1}} = \frac{1}{3}$$

$$C_3 = [0;2,1,2] = 0 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{8}$$

$$C_4 = [0;2,1,2,6] = 19/51$$

Cálculo mas eficiente

Para este fin, definamos los números p_k y q_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 & q_0 &= 1 \\ p_1 &= a_1 a_0 + 1 & q_1 &= a_1 \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

para $k = 2, 3, \ldots, n$.

Un cálculo directo muestra que los primeros convergentes de $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ son

$$C_0 = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

Teorema 2

El k-ésimo convergente de la fracción continua simple $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ tiene el valor

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \quad 0 \leq k \leq n$$

Prueba del teorema 2

La prueba del teorema se realiza por metodo de inducción.
El teorema es verdadero para el paso base:
Es verdadero para $k = 0, 1, 2$. Supongamos que es verdadero para $k = m$, donde $2 \leq m < n$; es decir, para este m,

$$C_m = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}} \quad (1)$$

Paso inductivo $k = m + 1$
Como se mostro anteriormente, el convergente C_{m+1} se obtiene de C_m, cambiando a_m por el valor $a_m + 1/a_{m+1}$:

$$C_{m+1} = \left[a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right]$$

Prueba del teorema 2

Como la ecuacion 1, sigue siendo valida para cualquier valor colocado en la posicición a_m, al hacer la sustitución, de a_m por $a_m + 1/a_{m+1}$:

$$C_{m+1} = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}}$$

Prueba del teorema 2

$$
\begin{aligned}
C_{m+1} &= \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} \\
&= \frac{\frac{a_m a_{m+1}+1}{a_{m+1}} p_{m-1} + p_{m-2}}{\frac{a_m a_{m+1}+1}{a_{m+1}} q_{m-1} + q_{m-2}} \\
&= \frac{(a_m a_{m+1}+1) p_{m-1} + a_{m+1} p_{m-2}}{(a_m a_{m+1}+1) q_{m-1} + a_{m+1} q_{m-2}} \\
&= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}}
\end{aligned}
$$

Esta es precisamente la forma que el teorema debería tomar en el caso en que $k = m+1$. Por lo tanto, por inducción, el teorema enunciado se cumple.

Ejemplo 1

Veamos cómo funciona, con el ejemplo $19/51 = [0;\ 2,\ 1,\ 2,\ 6]$:

$$
\begin{array}{ll}
p_0 = 0 & q_0 = 1 \\
p_1 = 0 \cdot 2 + 1 = 1 & q_1 = 2 \\
p_2 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 & q_2 = 1 \cdot 2 + 1 = 3 \\
p_3 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 & q_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \\
p_4 = 6 \cdot 3 + 1 = 19 & q_4 = 6 \cdot 8 + 3 = 51
\end{array}
$$

Esto dice que los convergentes de $[0;\ 2,\ 1,\ 2,\ 6]$ son

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = 0 \qquad C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2} \qquad C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{8} \qquad C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{19}{51}$$

- El proceso de obtener la fraccion continua de un numero racional, es el mismo para obtener el $mcd(a, b)$ con el algoritmo de Euclides.
- Evidentemente, el valor de cualquier fracción continua simple finita siempre será un número racional. ¿Qué pasa con los irracionales?
- ¿Siempre son finitas?

Bibliografía

Burton, D. M. (2011). Elementary number theory (7a ed.). McGraw-Hill.

Rodríguez, M. L. (s.f.). Fracciones continuas. XVII Seminario Estalmat Andalucía. https://www.estalmat.org/archivos/Andalucia-Fracciones$_c$*ontinuas.pdf*