FRACCIONES CONTINUAS INFINITAS

Juan Pablo Cordón Cotero

Una **fracción continua infinita** es una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

$$\text{donde todo } a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

$$e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

Una fracción continua infinita **simple** es una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

$$\text{donde } a_n \in \mathbb{R}^+$$

También usamos la notación compacta:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Notamos que los **convergentes** están definidos para toda *n*

$$C_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

El valor de la fracción continua infinita

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

es el límite de los convergentes C_n

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

dado que el límite existe...

TEOREMA 15.2

El k-ésimo convergente C_k de una fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ es:

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} p_0 = a_0 \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} q_0 = 1 \\ q_1 = a_1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array}$$

TEOREMA 15.3

[redacted]

LEMA

[redacted]

TEOREMA 15.4

[redacted]

TEOREMA 15.3

Dado $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ el k-ésimo convergente, se cumple

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \qquad 1 \leq k \leq n$$

Dem:

Sea k = 1:

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_1 \cdot a_0 = 1 = (-1)^{1-1}$$

Suponemos que se cumple para k = m, entonces:

$$\begin{aligned} p_{m+1} q_m - q_{m+1} p_m &= (a_{m+1} p_m + p_{m-1}) q_m - (a_{m+1} q_m + q_{m-1}) p_m \\ &= -\left(p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1}\right) \\ &= -(-1)^{m-1} = (-1)^m \end{aligned}$$

LEMA

Dado $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ el k-ésimo convergente, se cumple

$$q_{k-1} \leq q_k \qquad 1 \leq k \leq n$$

y para n>1 la desigualdad es estricta

Dem:

Sea k = 1:

$$q_0 = 1 \leq a_1 = q_1$$

Suponemos que se cumple para k = m, entonces:

$$q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1} > a_{m+1}q_m \geq 1 \cdot q_m = q_m$$

TEOREMA 15.4

a) Los C_k con **k par** forman una sucesión creciente:

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots$$

b) Los C_k con **k impar** forman una sucesión decreciente:

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots$$

c) Todo convergente con **k impar** es mayor que cualquier convergente con **k par**

Dem:

$$C_{k+2} - C_k = (C_{k+2} - C_{k+1}) + (C_{k+1} - C_k) = \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right)$$

por 15.3

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+2}q_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k} = \frac{(-1)^k(q_{k+2} - q_k)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}}$$

$$C_{k+2} - C_k = \frac{(-1)^k (q_{k+2} - q_k)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}}$$

a) Entonces $C_{k+2} - C_k$ tiene el mismo signo que $(-1)^k$, por lo que si **k es par,** $C_{2j+2} > C_{2j}$ y tenemos:

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots$$

b) De forma similar, para todo **k impar,** $C_{2j+1} < C_{2j-1}$ y tenemos:

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots$$

c) Finalmente, dividimos $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$ entre $q_k q_{k-1}$

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

por lo que $C_{2j} < C_{2j-1}$

TEOREMA 15.2

El k-ésimo convergente C_k de una fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ es:

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} p_0 = a_0 \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} q_0 = 1 \\ q_1 = a_1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array}$$

TEOREMA 15.3

Dado $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ el k-ésimo convergente, se cumple

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \qquad 1 \leq k \leq n$$

LEMA

Dado $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ el k-ésimo convergente, se cumple

$$q_{k-1} \leq q_k \qquad 1 \leq k \leq n$$

TEOREMA 15.4

a) Los C_k con **k par** forman una sucesión creciente: $C_0 < C_2 < C_4 < \cdots$
b) Los C_k con **k impar** forman una sucesión decreciente: $C_1 > C_3 > C_5 > \cdots$
c) Todo convergente con **k impar** es mayor que cualquier convergente con **k par**

A probar: Existe $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$

Dem:

Por Teorema 15.4 tenemos:

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2n} < \cdots < C_{2n+1} < \cdots < C_5 < C_3 < C_1$$

Como tenemos secuencias monótonas y acotadas, convergen:

$$C_{2n} \to \alpha \qquad\qquad C_{2n+1} \to \alpha'$$

Por Teorema 15.3

$$\alpha' - \alpha < C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}$$

entonces

$$|\alpha' - \alpha| < \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} < \frac{1}{q_{2n}^2}$$

EJEMPLO: Considérese $[1;1,1,1,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$

Los n-ésimos convergentes están dados por

$$C_n = [1;\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}] = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si x es el valor de la fracción continua:

$$x = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{x}.$$

Lo que da la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ cuya única raíz positiva es $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

TEOREMA 15.5

El valor de **toda fracción continua infinita** es un número **irracional**

Dem:

Supóngase por **contradicción** que $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = \frac{a}{b}$ es racional, es decir, es el límite de

$$C_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Como $\frac{a}{b}$ se encuentra estrictamente entre los convergentes C_n y C_{n+1} , tenemos:

$$0 < \left|\frac{a}{b} - C_n\right| < |C_{n+1} - C_n| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

$$\Rightarrow 0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Recordemos que q_i es una secuencia de enteros creciente, por lo que podemos hacer n tal que $b < q_{n+1}$

$$\Rightarrow 0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}} < 1 \qquad (\rightarrow\leftarrow)$$

¿FRACCIONES CONTINUAS INFINITAS DISTINTAS PUEDEN REPRESENTAR EL MISMO IRRACIONAL?

Notamos que:

$$
\begin{aligned}
.\ [a_0; a_1, a_2, \ldots] &= \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n]} \right) \\
&= a_0 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} [a_1; a_2, \ldots, a_n]} \\
&= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots]}
\end{aligned}
$$

TEOREMA 15.6

Si dos fracciones continuas infinitas $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ y $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ son **iguales,** entonces se cumple $a_n = b_n, \forall n \geq 0$

Dem:

Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ por lo que $C_0 < x < C_1$ es equivalente a $a_0 < x < a_0 + \dfrac{1}{a_1}$

Como $a_1 \geq 1$, por ser entero, tenemos $a_0 < x < a_0 + 1$ por lo que $[x] = a_0$ es el entero más grande.

Sea $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = x = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ por lo que $a_0 = [x] = b_0$

Como $a_0 + \dfrac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots]} = b_0 + \dfrac{1}{[b_1; b_2, b_3, \ldots]} \Rightarrow [a_1; a_2, a_3, \ldots] = [b_1; b_2, b_3, \ldots]$

y por inducción probamos fácilmente que $a_n = b_n, \forall n \geq 0$

TEOREMA 15.6

Si dos fracciones continuas infinitas $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ y $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ son **iguales,** entonces se cumple $a_n = b_n, \forall n \geq 0$

COROLARIO

Si dos fracciones continuas infinitas son **distintas,** entonces representan **distintos números racionales.**

¿TODOS LOS IRRACIONALES PUEDEN REPRESENTARSE?