UVG

Ecuación de Legendre

Javier Ovalle Chiquín

Cronograma

1. Contexto
2. Teorema
3. Esquema de la prueba
4. Ejemplos

Contexto

Adrien Marie Legendre fue una figura clave en las matemáticas del siglo XVIII y XIX, con aportes fundamentales en geometría, análisis, teoría de números y física matemática.

Legendre es notable por introducir los polinomios que llevan su nombre, como los polinomios de Legendre o la ecuación de Legendre

La historia de esta ecuación está ligada al interés de Legendre en problemas físicos y matemáticos vinculados a la gravitación y la mecánica celeste, donde esta ecuación aparece al resolver ecuaciones en coordenadas esféricas, como la ecuación de Laplace o Helmholtz, específicamente al hacer la separación de variables. La ecuación constituye un ejemplo clásico de ecuaciones diferenciales con soluciones ortogonales

Teorema

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ enteros libres de cuadrados, primos relativos entre sí, dos a dos, y no todos del mismo signo.
La ecuación $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ posee solución no trivial $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $-bc$ es un cuadrado módulo a, $-ca$ es cuadrado módulo b, y $-ab$ es cuadrado módulo c.

Esquema de la prueba

$$\text{De ida} \rightarrow$$

$$\text{A probar: } -bc \text{ es cuadrado mod a}$$

- Por simetría de la ecuación, se prueba para -ca y para -ab en módulos b y c
- x, y, z son primos relativos dos a dos
- Supongamos por contradicción que no lo son
- $$ax^2 + by^2 + cz^2 \rightarrow a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2$$

Esquema de la prueba

- Limitarnos a soluciones primitivas
- Pasarlo todo a módulo a
- Multiplicar b de ambos lados
- z primo relativo con a, suponer que no
- Z invertible, mod a
- Despeje

Esquema de la prueba

De regreso $\leftarrow$

A probar: La ecuacion $ax^2 + by^2 + cz^2$ tiene solucion

- Suponer a<0, b<0, c>0
- Por hip. existe u entero tal que -bc $\simeq$ u^2 (mod a)
- Mod a, multiplicar b^{-1} de ambos lados
- Encontrar el L_1 y M_1 mod a
- Generalizar y utilizar el teorema chino, mod (abc)

Esquema de la prueba

Considerar triplas en Z^3

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt[2]{|bc|} \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt[2]{|ca|} \quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt[2]{|ab|}$$

$$(\lfloor\sqrt{|bc|}\rfloor + 1)(\lfloor\sqrt{|ca|}\rfloor + 1)(\lfloor\sqrt{|ab|}\rfloor + 1) > abc$$

Principio de Dirichlet

$$L(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \equiv 0 \pmod{abc}$$

Esquema de la prueba

$$\tilde{x} = x_1 - x_2, \tilde{y} = y_1 - y_2, \tilde{z} = z_1 - z_2$$

$$-2abc = a|bc| + b|ca| < a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 \leq c\tilde{z}^2 < |ab|c = abc.$$

Verificamos en el intervalo (-2abc, abc), específicamente en el caso -abc

$$\begin{aligned} &= (a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 + abc)(\tilde{z}^2 + ab), \\ &= a(\tilde{x}\tilde{z} + b\tilde{y})^2 + b(\tilde{z}\tilde{y} - a\tilde{x})^2 + c(\tilde{z}^2 + ab)^2. \end{aligned}$$

Solución: $(\tilde{x}\tilde{z} + b\tilde{y}, \tilde{z}\tilde{y} - a\tilde{x}, \tilde{z}^2 + ab). \square$

Ejemplos

- Con solución:

$$3x^2 + 5y^2 - 8z^2 = 0$$

- Sin solución:

$$5x^2 + 6y^2 - 7x^2 = 0$$

Gracias por su atención

UVG