Fracciones Continuas IV

Buenas aproximaciones, Lema, Teorema 15.8, Teorema 15.9 y ejemplos.

Emilio Reyes

Presentación Seminario 1: los convergentes p_n/q_n son las mejores fracciones parciales que aproximan a un irracional.

Teorema 15.5

Si $C_n = p_n/q_n$ es el n-ésimo convergente del número (irracional) x, entonces para cualquier fracción a/b con $1 \leq b \leq q_{n+1}$, se cumple

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|x - \frac{a}{b}\right|$$

¿Cómo lo probamos y qué implicaciones tiene?

Lema

Si p_n/q_n es el n-ésimo convergente de x, y $a, b \in \mathrm{Z}$ con $1 \leq \mathrm{b} < \mathrm{q}_{\mathrm{n}+1}$, entonces

$$|\mathrm{q}_{\mathrm{n}}x - \mathrm{p}_{\mathrm{n}}| \leq |\mathrm{b}x - \mathrm{a}|$$

prueba:

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} p_n\alpha + p_{n+1}\beta = a \\ q_n\alpha + q_{n+1}\beta = b \end{cases}$$

Este lema nos servirá para realizar la prueba directa del teorema 15.8.

Entonces tendríamos que:

$$\begin{aligned} |bx-a| &= |(q_n\alpha + q_{n+1}\beta)x\ -(p_n\alpha+p_{n+1}\beta)| \\ &= |\alpha(q_n x\ -p_n)+\beta(q_{n+1}x-p_{n+1})| \end{aligned}$$

Para continuar, debemos estudiar un poco los signos de

$$\alpha(q_n x\ -p_n)\ y\ \beta(q_{n+1}-p_{n+1})$$

Porque queremos usar la propiedad

$$|A+B| = |A| + |B|$$

Dicha propiedad se cumple solo si A y B tienen el mismo signo.

Al sacar el determinante obtenemos $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^{n+1}$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única en los enteros, y existen enteros α y β que cumplen.

Si $\alpha = 0, b \geq q_{n+1}$, lo que contradice la hipótesis.

Si $\beta = 0$, se cumple la desigualdad.

Consideremos cuando $\beta \neq 0$.

Por el teorema 15.3, sabemos que para todo k: $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$

Si $\beta < 0$ entonces $\alpha > 0$
Si $\beta > 0$ entonces $\alpha < 0$

Entonces, α y β tienen signos opuestos. A su vez, como $\frac{p_n}{q_n} < x < p_{n+1}/q_{n+1}$, entonces $q_n x - p_n$ y $q_{n+1}x - p_{n+1}$ también tienen Signos opuestos.

Así, $\alpha(q_n x - p_n)$ y $\beta(q_{n+1}x - p_{n+1})$ tienen el mismo signo.

Entonces:

$$|bx-a| = |(q_n\alpha + q_{n+1}\beta)x \ - (p_n\alpha + p_{n+1}\beta)|$$

$$= |\alpha(q_nx \ - p_n) + \beta(q_{n+1}x - p_{n+1})|$$

$$= |\alpha|\,|q_nx - p_n| + |\beta|\,|q_{n+1}x - p_{n+1}|$$

$$\geq |\alpha|\,|q_nx \ - p_n|$$

$$\geq |q_nx \ - p_n|$$

Dicha propiedad se cumple solo si A y B tienen el mismo signo.

Regresemos al Teorema 15.5

Si $C_n = p_n/q_n$ es el n-ésimo convergente del número (irracional) x, entonces para cualquier fracción a/b con $1 \leq b \leq q_n$, se cumple

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|x - \frac{a}{b}\right|$$

Ya podemos usar el lema demostrado anteriormente.

prueba:

Supongamos por contradicción que

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| > \left|x-\frac{a}{b}\right|$$

Entonces,

$$|q_n x - p_n| = q_n\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| > b\left|x-\frac{a}{b}\right| = |bx-a|$$

Contradiciendo el lema.

Este lema nos servirá para realizar la prueba directa del teorema 15.8.

Ejemplo. π y sus convergentes.

De la fracción continua de $\pi \sim 3.14159265358979323$ se obtiene:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \dots]$$

n	Convergente	Valor	Error	q_n
0	3/1	3.0000000	0.141593	1
1	22/7	3.142857	0.001265	7
2	333/106	3.141509	0.000084	106
3	355/113	3.141593	0.00000027	113

¿Cómo nos sirve el teorema 15.8 aquí?: cada convergente de π es la “mejor aproximación posible” con un denominador no mayor que su q_n

Teorema 15.9

Si x es irracional, y $\gcd(a, b) = 1, b \geq 1$ satisface

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

entonces, $\frac{a}{b}$ es un convergente de x.

¿Qué dice? Si una fracción a/b aproxima a x “demasiado bien” (mejor que 1/2b^2), entonces a/b es un convergente de x.

prueba:

Asúmase por absurdo que a/b no es un convergente de x.

Por las propiedades de los convergentes sabemos que

$$q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$$

Entonces, para cualquier denominador b, existe un único índice n tal que: $q_n \leq b < q_{n+1}$

Para este n en específico, podemos usar el lema (cuya hipótesis era $b < q_{n+1}$. Tenemos que:

$$|q_n x - p_n| \leq |bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b}$$

Con lo cual:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2bq_n}$$

Por la suposición de $a/b \neq p_n/q_n$, tenemos $1 \leq |bp_n - aq_n|$

Entonces:

$$\frac{1}{bq_n} \leq \left|\frac{bp_n - aq_n}{bq_n}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}$$

De donde $b < q_n$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, a/b tiene que ser un convergente de x.

Muchas gracias por su atención.

Espero les haya ayudado para comprender la aplicación de las fracciones continuas en las buenas aproximaciones de números. ¿Dudas?