

Teoría de Números 2025

Lista 05

22.septiembre.2025

Bestiario de Ecuaciones Modulares

En esta tarea exploraremos los potenciales usos de los Modelos de Lenguaje (*Large Language Models* o LLMs), para optimizar la búsqueda de soluciones e información en matemáticas profesionales.

Objetivos

- Usar la IA para generar ejemplos interesantes de congruencias y de ecuaciones modulares.
- Utilizar y dominar los algoritmos aprendidos en clase para determinar la existencia y hallar las soluciones de diferentes tipos de ecuaciones modulares.
- Validar de forma analítica y crítica si las soluciones generadas por la IA son correctas y son válidas dentro del rigor matemático.
- Documentar paso a paso esta validación analítica.
- Construir un “Bestiario” o colección de ejemplos, de forma colaborativa, utilizando recursos interactivos.

Instrucciones

Parte 1. Exploración con los LLMs

Utilizar los motores de IA generativa a su alcance para generar ejemplos de congruencias en las siguientes categorías:

- Congruencias lineales simples: tipo $ax \equiv b \pmod{n}$.
- Sistema de 2×2 : dos congruencias lineales en 2 variables

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \pmod{n}.$$

- Sistemas de congruencias lineales: tipo Teorema Chino.
- Congruencias cuadráticas: tipo $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n}$.
- Congruencias cúbicas o de grado mayor: tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 0 \pmod{n}$.

Para cada uno de los casos anteriores, deberá encontrar ejemplos, atendiendo a las diferentes situaciones:

- módulo p primo,
- módulo p^k potencia de primo,
- módulo n compuesto.

Asimismo, en cada una de las combinaciones anteriores, deberán pedir a los LLMs que construyan ejemplos de casos que sí tienen solución, y de casos que no posean solución.

También deberán solicitar a los motores de IA generativa que proporcionen la solución o conjunto de soluciones.

Parte 2. Verificación manual

Utilizando los métodos aprendidos en clase para resolver congruencias y sistemas de congruencias, verificar si la respuesta que proporciona la IA es correcta o no. En cada caso, deberán documentar:

- El motor de búsqueda de IA generativa o LLM utilizado,
- El prompt ingresado para dicho caso,
- La respuesta de la IA,
- El proceso, paso a paso, de su validación rigurosa.

Contrastar su respuesta contra la del LLM. Señalen si la IA cometió errores (por ejemplo: soluciones inexistentes, incompletas, o no justificadas). Si hay un error, corrijan y expliquen qué propiedad matemática no se está cumpliendo.

Parte 3. Bestiario

Actividad para el viernes 26 de septiembre:

Entre todos los estudiantes, construiremos un “Bestiario” de los ejemplos generados de todas estas congruencias con sus soluciones (o falta de soluciones) y los ejemplos generados.

Para ello, utilizaremos alguna herramienta para trabajo colaborativo en línea. Estas indicaciones serán dadas el día viernes. Por favor todos traer su compu.