Teoría de Números 2025

Lista 04

22.agosto.2025

1. Si p es un primo que satisface $n < p < 2n$, muestre que

$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. Comprobar que

   a) $53^{103} + 103^{53}$ es divisible por 39,

   b) $111^{333} + 333^{111}$ es divisible por 7.

3. Asumiendo que $495 \mid 273x49y5$, encontrar los valores de los dígitos x y y.

4. Pruebe que para todo $n > 2$, se cumple que $\displaystyle\sum_{(k,n)=1,\ 1 \leq k \leq n} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

5. a) Dar el criterio de divisibilidad de $n \in \mathbb{N}$ por 3 y por 8 cuando los dígitos de n se escriben en base 9.

   b) ¿Es el entero $(447836)_9$ divisible entre 3? ¿Y entre 8?

6. a) Construya un criterio de divisibilidad entre 89.

   b) Utilice el criterio anterior para verificar si los números 19641, 32752 y 45843 son divisibles entre 89.

7. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, y sean a, b enteros primos relativos a m. Pruebe que si x, y son enteros tales que

$$a^x \equiv b^x \pmod{m} \qquad \text{y} \qquad a^y \equiv b^y \pmod{m}$$

   entonces

$$a^{(x,y)} \equiv b^{(x,y)} \pmod{m}.$$

8. Hallar <u>todos</u> los enteros positivos n para los cuales el número obtenido de n al borrar el último dígito, es un divisor de n. Justificar que los enteros que usted encontró son todos los posibles.

9. Leer la sección **5.9 The Perpetual Calendar** del libro *Elementary Number Theory* de Kennet Rosen. A partir de la explicación en la lectura, implementar un algoritmo en Python que calcule el día de la semana para cualquier fecha en el calendario Gregoriano.

   Use su algoritmo para determinar el día de la semana de su fecha de nacimiento.