

# Teoría de Números 2025

Lista 03

01.agosto.2025

1. Pruebe que un entero positivo  $n > 1$  es primo, si y sólo si, no es divisible entre ningún primo  $p$ ,  $1 < p \leq \sqrt{n}$ .
2. Implementar en Python dos funciones que simulen una **criba de Eratóstenes**. Su función debe recibir como argumento un entero positivo  $n > 1$  y deben devolver cada una, uno de los siguientes resultados:
  - (a) una variable booleana o un mensaje que indique si  $n$  es primo o es compuesto.
  - (b) la lista de todos los primos  $1 < p \leq n$ .

Para la función en (a), investigar cuál es la complejidad computacional de la criba de Eratóstenes. Puede utilizar las simplificaciones vistas en clase.

Ilustrar en una gráfica la complejidad computacional o el tiempo de ejecución de su función en términos del tamaño del entero  $n$ , y discutir si sus resultados empíricos corresponden con la complejidad investigada.

3.
  - (a) Investigar la **criba de Sundaram** y explicar cómo funciona.
  - (b) Al igual que en el ejercicio anterior, implementar una función que simule la criba de Sundaram y realizar un gráfico que muestra la complejidad computacional o el tiempo de ejecución.
  - (c) Según sus gráficas, ¿cuál algoritmo es más eficiente para determinar si  $n$  es primo, Eratóstenes o Sundaram? ¿O son similares? Discuta sus resultados.
4. Hasta julio de 2025, se han descubierto 52 primos de Mersenne (de la forma  $2^m - 1$ ). El último de ellos fue descubierto por Luke Durant en 2024.

Dé una estimación educada, justificada por algún argumento válido, sobre cuándo cree usted que se va a descubrir el siguiente primo de Mersenne (haga las investigaciones necesarias).

5. Para  $x \geq 1$ , definimos como  $\pi(x) =$  número de primos  $\leq x$ .

El **Teorema de los Números Primos** establece que una aproximación para contar  $\pi(x)$  puede ser dada por la función

$$\psi(x) = \frac{x}{\log x}.$$

Elabore una tabla comparativa entre  $\pi(x)$  y  $\psi(x)$  para los siguientes valores  $x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$ . En dicha tabla deberá incluir los valores de  $x$ ,  $\pi(x)$ ,  $\psi(x)$ , así como un cálculo del error en obtenido entre  $\pi$  y la aproximación mediante:

$$\text{error absoluto} = |\psi(x) - \pi(x)|, \quad \text{error relativo} = \frac{|\psi(x) - \pi(x)|}{\pi(x)}, \quad \text{error cociente} = \frac{\psi(x)}{\pi(x)}.$$