Teoría de Números 2025

Lista 02

18.julio.2025

1. Implementar en Python las siguientes funciones:

   a) Una función que calcula el cociente y el residuo de dos enteros a y b. Su función debe recibir como argumentos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, y debe devolver el cociente y el residuo $q, r \in \mathbb{Z}$ Z, $tales que$b = aq + r,0 $\leq r < |a|$.

   b) Una función que computa el MDC de dos enteros a y b, mediante el algoritmo de Euclides. Su función debe recibir como argumentos $a, b \in \mathbb{Z}$ y debe devolver el máximo divisor común $d = (a, b) \in \mathbb{N}$.

   c) Investigar cómo se realiza e implementar el algoritmo de Euclides extendido (egcd extended greatest common divisor). Esta es una función que calcula el MDC de dos enteros a y b, mediante el algoritmo de Euclides, y además devuelve los coeficientes M y N del Lema de Bézout. Su función debe recibir como argumentos $a, b \in \mathbb{Z}$ y debe devolver el máximo divisor común $d = (a, b) \in \mathbb{N}$ y los coeficientes $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $d = xa + yb$.

   Su funciones deben ser robustas: indicar avisos o excepciones cuando las entradas no sean enteros o no cumplan las hipótesis requeridas.

   Testar su funciones con diferentes casos, y verificar que funciona correctamente. Deberán mostrar en su informe evidencia de estas pruebas de funcionamiento.

2. Calcular, por cualquier medio que sea necesario, el máximo divisor común d de

$$31415926535897932384626433 8 \quad \text{y} \quad 2718281828459045235360287 47.$$

   Hallar los coeficientes enteros correspondientes que hacen que d sea combinación lineal de estas cantidades.

3. Probar las siguientes propiedades del MCD y el MCM. Aquí, $a, b, c \in \mathbb{N}$ son naturales cualesquiera.

   a) $[a, (a, b)]$.

   b) $[(a, b), (a, c)] = (a, [b, c])$.

   c) $(ab, ca, bc)(a, b, c) = (a, b)(c, a)(b, c)$.

4. Sea F_n la secuencia de números de Fibonacci, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.
   Muestre que para todo $n \geq 1$, si $a = F_n$ y $b = F_{n+1}$, entonces el algoritmo de Euclides para encontrar (a, b) ejecuta exactamente n divisiones.

5. Determine todos los pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que el menor múltiplo común de a y b es $2^3 \cdot 5^7 \cdot 11^{13}$.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un divisor positivo de 2025^{99}, éste sea un múltiplo de 2025^{77}?

7. Un entero se llama **libre de cuadrados** si no es divisible por el cuadrado de ningún entero.

   a) Pruebe que un entero $n > 1$ es un cuadrado si, y sólo si, en la factoración en primos canónica de n todos los exponentes son pares.

   b) Muestre que $n > 1$ es libre de cuadrados si, y sólo si, admite una factoración como producto de primos distintos.

   c) Todo entero $n > 1$ es el producto de un cuadrado perfecto, y un entero libre de cuadrados.

   d) Verifique que todo entero $n \in \mathbb{Z}$ puede expresarse en la forma $n = 2^k m$, donde $k \geq 0$ y m es un número impar.

8. **El problema de Basilea.** Considere una retícula rectangular en $\mathbb{Z}^2$ y tome R una región finita de esta retícula. Por ejemplo, un cuadrado $R = ([-r, r] \times [-r, r]) \subset \mathbb{Z}^2$. Esto puede implementarse en python mediante la funciones `numpy.linspace` y `numpy.meshgrid`, como se ilustra en la figura.

   Estimar la densidad de pares primos relativos (p, q) dentro de R, mediante un algoritmo que cuente los pares primos relativos. Experimente con regiones de diferentes radios, y proporcione evidencia de que la densidad de pares coprimos en $\mathbb{Z}^2$ tiende al valor $\dfrac{6}{\pi^2}$ a medida que la región considerada crece.