Teoría de Números 2025

Lista 01

04.julio.2025

1. Muestre que el cubo de cualquier entero puede escribirse como diferencia de dos cuadrados. (Sugerencia: observe que $n^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$.)

2. Si la secuencia de números a_n está definida por $a_1 = 11$, $a_2 = 21$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para todo $n \geq 3$, pruebe que

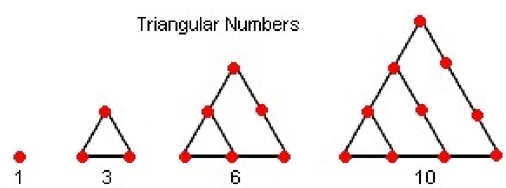
$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1, \quad \forall n \geq 1.$$

3. Para $n \geq 1$, verificar que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$.

4. **Números Triangulares.** Cada uno de los números

$$1 = 1,\ 3 = 1 + 2,\ 6 = 1 + 2 + 3,\ 10 = 1 + 2 + 3 + 4,\ \ldots$$

representa el númro de puntos que se pueden configurar en triángulos equiláteros



Esto llevó a los griegos a llamar a un número T_n *triangular* si es igual a la suma de enteros consecutivos, comenzando de 1. Esto es

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Compruebe las siguientes afirmaciones relacionadas con números triangulares.

a) Un número es triangular si, y sólo si, es de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$, para algún $n \geq 1$. (Pitágoras, *circa* 550 B.C.)

b) El entero n es un número triangular si, y sólo si, $8n + 1$ es un cuadrado perfecto. (Plutarco, *circa* 100 A.D.)

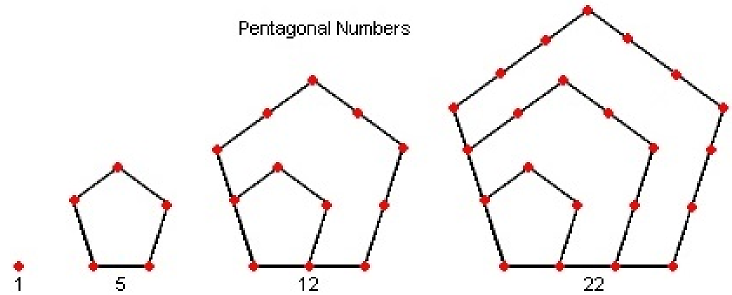
c) La suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto. (Nicómano, *circa* 100 A.D.)

d) Si n es un número triangular, también lo son $9n + 1$, $25n + 3$, y $49n + 6$. (Euler, 1775)

5. Pruebe que la suma de los recíprocos de los primeros n números triangulares es menor que 2; esto es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{T_n} < 2, \quad \forall n \geq 1.$$

(Sugerencia: Observe que $\frac{2}{n(n+1)} = 2\big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\big)$.)



6. **Números Pentagonales.** Cada uno de los números

$$1,\ 5 = 1 + 4,\ 12 = 1 + 4 + 7,\ 22 = 1 + 4 + 7 + 10,\ \ldots$$

representa el número de puntos que pueden configurarse sobre un pentágono

Los antiguos griegos llamaron a éstos *números pentagonales*. Si p_n denota el n-ésimo número pentagonal, donde $p_1 = 1$ y $p_n = p_{n-1} + (3n - 2)$ para $n \geq 2$; pruebe que

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

7. **Triángulo de Pascal.** Demuestre que la suma de los primeros $n - 2$ números de la segunda diagonal en el triángulo de Pascal, es igual a $\binom{n+1}{3}$. Esto es

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

8. **Números de Fibonacci.** Probar que al sumar ciertas diagonales "oblicuas" del triángulo de Pascal, aparecen los números de Fibonacci

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} = F_n,$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, \ldots$$