Descenso de Fermat (Descenso Infinito)

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 34) 27.octubre.2025

Descenso de Fermat

Dada una ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

el método del descenso infinito permite mostrar que esta ecuación no posee soluciones enteras positivas o, sobre ciertas condiciones, permite hallar todas sus soluciones enteras.

Si el conjunto de soluciones $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : \; f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ es no vacío, nos gustaría considerar la solución "mínima" en cierto sentido. En otras palabras, queremos construir una función $\phi : A \to \mathbb{N}$ y considerar la solución $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ con $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ mínimo.

El **método del descenso** (**descenso de Fermat**, o **descenso infinito**) consiste en obtener, a partir de esta solución mínima, otra todavía menor, lo cual claramente conduce a una contradicción, probando que A debe ser vacío.

Ya hemos usado este argumento antes, en el Algoritmo de Euclides. Allí, por ejemplo dado un par $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, con $a \geq b$, podemos usar $\phi(a, b) = b$.

Descenso de Fermat

Ejemplo: Encontrar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación
$$m^2 - mn - n^2 = \pm 1.$$

<u>Solución</u>: Observe que $m^2 = n^2 + mn \pm 1 \geq n^2, \implies m \geq n$. Con igualdad si, y sólo si, $mn = -1 \iff (m, n) = (1, 1)$. Esta es claramente una solución.

Consideramos ahora una solución (m, n), con $m > n$. Demostramos que $(n, m - n)$ también es solución. Para ello, observe que
$$\begin{aligned} n^2 - n(m-n) - (m-n)^2 &= n^2 - nm + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 \\ &= n^2 + nm - m^2 \;=\; -(m^2 - mn - n^2) \;=\; \mp 1. \end{aligned}$$

Así, si tenemos una solución (m, n), podemos hallar una cadena descendente de soluciones, y este proceso se detendrá cuando hallemos una solución (a, b), con $a = b$. Invirtiendo el proceso, encontramos todas las soluciones: Si (m, n) es solución, entonces $(m + n, n)$ también lo es. Portanto, todas las soluciones de la ecuación son
$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3), \ldots, (F_{n+1}, F_n), \ldots$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

Descenso de Fermat

Ejemplo: La ecuación de Markov. Consideramos la ecuación diofantina en enteros positivos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

De entrada, $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$ son soluciones. Además, como la ecuación es simétrica, sin pérdida de generalidad podemos considerar solamente las soluciones de la forma $x \leq y \leq z$, con coordenadas de forma no decreciente.
($(1, 1, 2)$ solución $\Longrightarrow$ $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ son soluciones).

Sea (x, y, z) una solución con $x \leq y \leq z$, y con $z \geq 1$. El polinomio cuadrático

$$T^2 - 3xyT + (x^2 + y^2) = 0,$$

posee dos soluciones: una de ellas es z, la otra es $z' = 3xy - z = \frac{x^2+y^2}{z} \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Veamos que si $y > 1$, entonces $z' < y$, y así (z', x, y) también es solución de la ecuación de Markov. Para ello, suponga por contradicción que $\frac{x^2+y^2}{z} = z' \geq y$, esto es, $yz \leq x^2 + y^2 \leq 2y^2$. En particular $z \leq 2y$. Se sigue que

Descenso de Fermat

$$5y^2 \geq y^2 + z^2 = 3xyz - x^2 = x(3yz - x) \geq x(3yz - y) \geq xy(3z - 1),$$

y portanto, $5y \geq x(3z - 1)$.

Ahora, observe que si $x \geq 2$, entonces $5y \geq 2(3z - 1) \geq 5z$, y portanto $x = y = z = 2$, que no es solución, lo que es un absurdo.

Luego, $x = 1$ y $\frac{1+y^2}{y} \geq z \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} + y \geq z \geq y$. Portanto,

- o tenemos que $\frac{1}{y} + y = z$, y en este caso $y = 1$ y $z = 2$, lo que contradice $y > 1$;
- ó $y = z$, y sustituyendo en la ecuación original, tenemos que $1 + y^2 + y^2 = 3y^2$, lo que implica que $y = z = 1$, lo que contradice $z > 1$.

Esto muestra que $z' < y$, y (z', y, x) es solución de Markov.

Lo anterior muestra que dad una solución (x, y, z) de la ecuación de Markov, con $z \geq 2$, siempre es posible encontrar una solución menor (z', y, x), y este proceso se detiene sólo cuando alcanzamos la solución trivial $(1, 1, 1)$.

Descenso de Fermat