Algoritmo de Euclides

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 04) 14.julio.2025

Teorema (Lema de Bézout)

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, existen $M, N \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = Ma + Nb$.

<u>Prueba</u>: Sea $S = \{xa + yb;\ x, y \in \mathbb{Z},\ xa + yb > 0\}$. Observe que $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b, b = 0 \cdot a + 1 \cdot b \in S$, de forma que S es no vacío. Por el principio del buen orden, S posee un elemento mínimo $d > 0$. En particular, $d = Ma + Nb$ para algunos $M, N \in \mathbb{Z}$. Si aplicamos el algoritmo de la división, con d dividiendo a, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = qd + r, \quad 0 \leq r < d.$$

Si $r > 0$, entonces $r = a - qd = a - (Ma + Nb) = (1 - M)a - Nb$ sería elemento de S, lo que contradice la elección minimal de r en S. De ahí que $r = 0$. Portanto, $d \mid a$.

Repitiendo el argumento anterior del algoritmo de la división pero ahora con d dividiendo b, se concluye también que $d \mid b$.

Lema de Bézout

Así, d es un divisor común de a y b.
Si c es otro divisor común de a y b, entonces $c \mid a, c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid Ma + Nb = d$. Portanto $d = (a, b)$, y hemos establecido que existen $M, N \in \mathbb{Z}$ tales que

$$d = (a, b) = Ma + Nb. \;\square$$

Definición

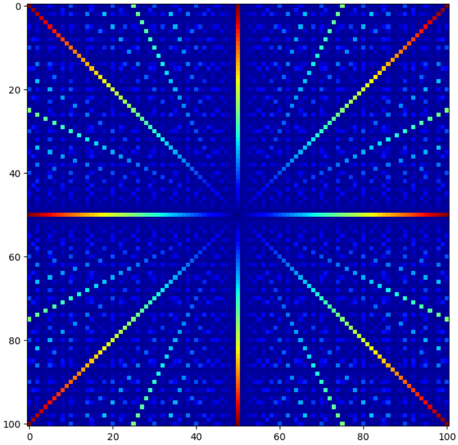
*Dos enteros a y b se llaman **primos relativos** o **coprimos** si no tienen factores en común (aparte de 1). Esto es, si* $(a, b) = 1$.

Corolario

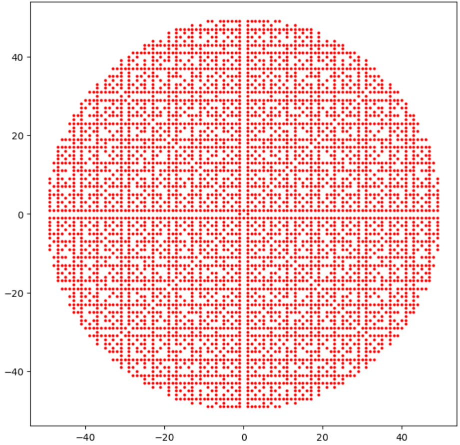
a y b son primos relativos. si y sólo si, existen $M, N \in \mathbb{Z}$ *tales que* $Ma + Nb = 1$. $\square$

Prueba: $(\Rightarrow)$ a, b primos relativos, $\Rightarrow$ existen $M, N \in \mathbb{Z}$ con $1 = (a, b) = Ma + Nb$.
$(\Leftarrow)$ Si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid Ma + Nb = 1$. Luego, $|d| = 1$.

Consecuencias



Mapa de calor del MDC.



Pares de primos relativos en $\mathbb{Z}^2$.

Corolario

a) *Si* $a \mid c$, $b \mid c$ *y* $(a, b) = 1$, *entonces* $ab \mid c$.

b) *(Lema de* EUCLIDES*) Si* $a \mid bc$ *y* $(a, b) = 1$, *entonces* $a \mid c$.

Prueba: (a) Como $(a, b) = 1$, por el Teorema de Bézout, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $xa + yb = 1$. Luego $xac + ybc = c$.
Ahora $b \mid c \;\Rightarrow\; ab \mid ac \mid xac$ y $a \mid c \;\Rightarrow\; ab \mid bc \mid ybc$. De ahí que $ab \mid xac + ybc = c$.

(b) Como $(a, b) = 1$, de nuevo por el Teorema de Bézout, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $xa + yb = 1$. Luego $xac + ybc = c$.
Como $a \mid xab$ y $a \mid bc \mid ybc$, entonces $a \mid xab + ybc = c$. $\square$.

Corolario

Si $d = (a, b)$, entonces $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Prueba: Sea $d = (a, b)$. Por el Teorema de Bézout, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $xa + yb = d$. Dividiendo la ecuación anterior entre d, escribimos

$$x\left(\frac{a}{d}\right) + y\left(\frac{b}{d}\right) = 1.$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}$, por el corolario al Teorema de Bézout a esta última ecuación, entonces $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son primos relativos, y $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. $\square$.

Nota Aclaratoria! El Lema de Bézout **no es** un si y sólo si. De hecho más adelante vamos a probar que los enteros n que admiten representación en la forma $n = xa + yb$ son precisamente los múltiplos de $d = (a, b)$.
Sin embargo, vale un si y sólo si, cuando se tiene $xa + yb = 1$. La única forma que 1 sea combinación lineal de a y b es cuando son coprimos.

MDC y MMC

Prop: $[a, b](a, b) = ab$, para $a, b \in \mathbb{N}$.

<u>Prueba</u>: Sea $d = (a, b)$. Por el Teorema de Bézout, existen $M, N \in \mathbb{Z}$ tales que $Ma + Nb = d$.
Por otro lado, $d \mid ab$. Sea entonces $m = \frac{ab}{d} \in \mathbb{N}$. Como $m = \left(\frac{a}{d}\right)b = a\left(\frac{b}{d}\right)$, sabemos que m es un múltiplo común de a y de b.

Suponga que n es otro múltiplo común de a y de b. Mostramos que $m \mid n$. En efecto,

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{ab/d} = \frac{nd}{ab} = \frac{n(Ma + Nb)}{ab} = n\left(\frac{M}{b} + \frac{N}{a}\right) = \frac{n}{b}M + \frac{n}{a}N \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $m \mid n$, y entonces $m = [a, b]$ es el mínimo múltiplo común. Se concluye que $ab = md = [a, b](a, b)$. $\square$.

¿Cómo calcular (a, b)?

Ejemplo: Calcular el MDC y MMC de 360 y 84.
Solución: Factoramos los números 360 y 84 (en factores primos):

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Los divisores coumnes para 360 y 84 son $2, 2, 3$. Entonces $(360, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Por otro lado, $[360, 84] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

¿Cómo calcular (a, b)?

Lema

Para $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = (a - b, b) = (a, b - a)$.

Prueba: Mostramos $(a, b) = (a - b, b)$. La otra igualdad es análoga.
Sean $d = (a, b)$, $c = (a - b, b)$. Entonces $d \mid a$, $d \mid b \;\Rightarrow\; d \mid a - b$. Luego, $d \mid c$.
Ahora, $c \mid a - b$, $c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid (a - b) + b = a$. De ahí, $c \mid d$. Esto muestra que $d = c$. $\square$

Lema

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $(a, 0) = |a|$.

Prueba: $a \mid 0$ y $a \mid a \;\Rightarrow\; a \mid (a, 0)$. Por otro lado, $(a, 0) \mid a$. luego, por antisimetría, $(a, 0) = |a|$. $\square$

¿Cómo calcular (a, b)?

Esto ya nos da un primer algoritmo para calcular (a, b):

Algoritmo 1: (Cálculo del MDC por restas).

```
def mdc(a, b):
  if (b > a):
    return mdc(b,a)
  if (b == 0):
    return a
  else:
    return mdc(a-b,a)
```

Emplea el algoritmo de la división como base. Conocido por los griegos (publicado por EUCLIDES).

Lema (Euclides)

Si $a = qb + r$, entonces $(a, b) = (b, r)$.

Prueba: Sean $d = (a, b)$ y $f = (b, r)$.
Como $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid a - qb = r$. Luego $d \mid (b, r) = f$.
Como $f \mid b$ y $f \mid r$, entonces $f \mid qb - r = a$. Luego $f \mid (a, b) = d$.
Por antisimetría, $d \mid f$ y $f \mid d \;\Rightarrow (a, b) = d = f = (b, r)$. $\square$

El Algoritmo de Euclides se basa en el hecho que en la división $a = qb + r$, podemos descartar el dividendo y calcular (a, b) como (b, r).

Algoritmo de Euclides

El algoritmo euclidiano se puede describir de la siguiente manera: sean $a, b \in \mathbb{Z}$ cuyo máximo común (a, b) divisor se desea calcular. Como $(|a|, |b|) = (a, b)$, podemos suponer que $a > b > 0$. El primer paso es aplicar el Algoritmo de la División, para obtener

$$a = q_1 b + r_1, \qquad \text{con } 0 \leq r_1 < b.$$

Si $r_1 = 0$, entonces $b \mid a$ y $(a, b) = b$. Cuando $r_1 \neq 0$, dividimos b por r_1 para producir enteros q_2, r_2 tales que

$$b = q_2 r_1 + r_2, \qquad \text{con } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Si $r_2 = 0$, entonces $r_1 \mid b$ y $(b, r_1) = r_1$, y nos detenemos. Caso contrario, $r_2 \neq 0$, continuamos este proceso y dividimos r_1 por r_2 para producir enteros q_3, r_3 tales que

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \qquad \text{con } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Algoritmo de Euclides

Este proceso de división continúa hasta que aparece un residuo cero, digamos, en el paso $n+1$, donde r_{n-1} se divide por r_n.

El resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\cdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Argumentamos que r_n, el último residuo distinto de cero que aparece de esta manera, es igual a (a, b).

Teorema (Algoritmo de Euclides)

En el sistema de ecuaciones (1), el máximo divisor común de a y b coincide con el último residuo diferente de cero. Esto es, $(a, b) = r_n$.

Prueba:
Por el Lema de Euclides, del sistema de ecuaciones (1), podemos concluir que

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n.$$

Falta nada más garantizar un detalle. Que el sistema de ecuaciones (1) es posible. La construcción de las relaciones $r_{i-1} = q_{i+1} r_i + r_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, (aquí $r_{-1} = a, r_0 = b$) está garantizada por el Algoritmo de la División.

Ademas, de la relación de los residuos $0 \leq r_i < r_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

Algoritmo de Euclides

se tiene que

$$0 = r_{n+1} < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_1 < b.$$

Por lo tanto hay a lo sumo b ecuaciones en el sistema (1). Esto garantiza que el Algoritmo de Euclides consiste a lo sumo de b pasos. En particular, es finito y termina. $\square$

Algoritmo de Euclides

Ejemplo: Hallar $(12378, 3054)$.

$$
\begin{aligned}
12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\
3054 &= 18 \cdot 162 + 138 \\
162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\
138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\
24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\
18 &= 3 \cdot 6 + 0.
\end{aligned}
$$

Luego, $(12378, 3054) = 6$.

Consecuencias: A partir del algoritmo de Euclides, podemos calcular los coeficientes en el Teorema de Bézout.

$$\begin{aligned}
12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\
3054 &= 18 \cdot 162 + 138 \\
162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\
138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\
24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\
18 &= 3 \cdot 6 + 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(12378, 3054) = 6 &= 24 - 1(18) = 24 - 1(138 - 5 \cdot 24) = 6(24) - 1(138) \\
&= 6(162 - 138) - 1(138) = 6(162) - 7(138) \\
&= 6(162) - 7(3054 - 18 \cdot 162) = 132(162) - 7(3054) \\
&= 132(12378 - 4 \cdot 3054) - 7(3054) = \mathbf{132}(12378) + (-\mathbf{535})(3054).
\end{aligned}$$

Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides puede escribirse en forma matricial. Observe que

$$a = q_1 b + r_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r_1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{M} \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Algoritmo de Euclides

Si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, y como $\det \mathbf{M} = (-1)^n$, entonces $\mathbf{M}^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$, y tenemos

$$\begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En particular $(a, b) = r_n = (-1)^n(m_{22}a - m_{12}b)$, da los coeficientes en el Teorema de Bézout.