Función zeta de Riemann

Sofi Lam 21548

CONTENIDO

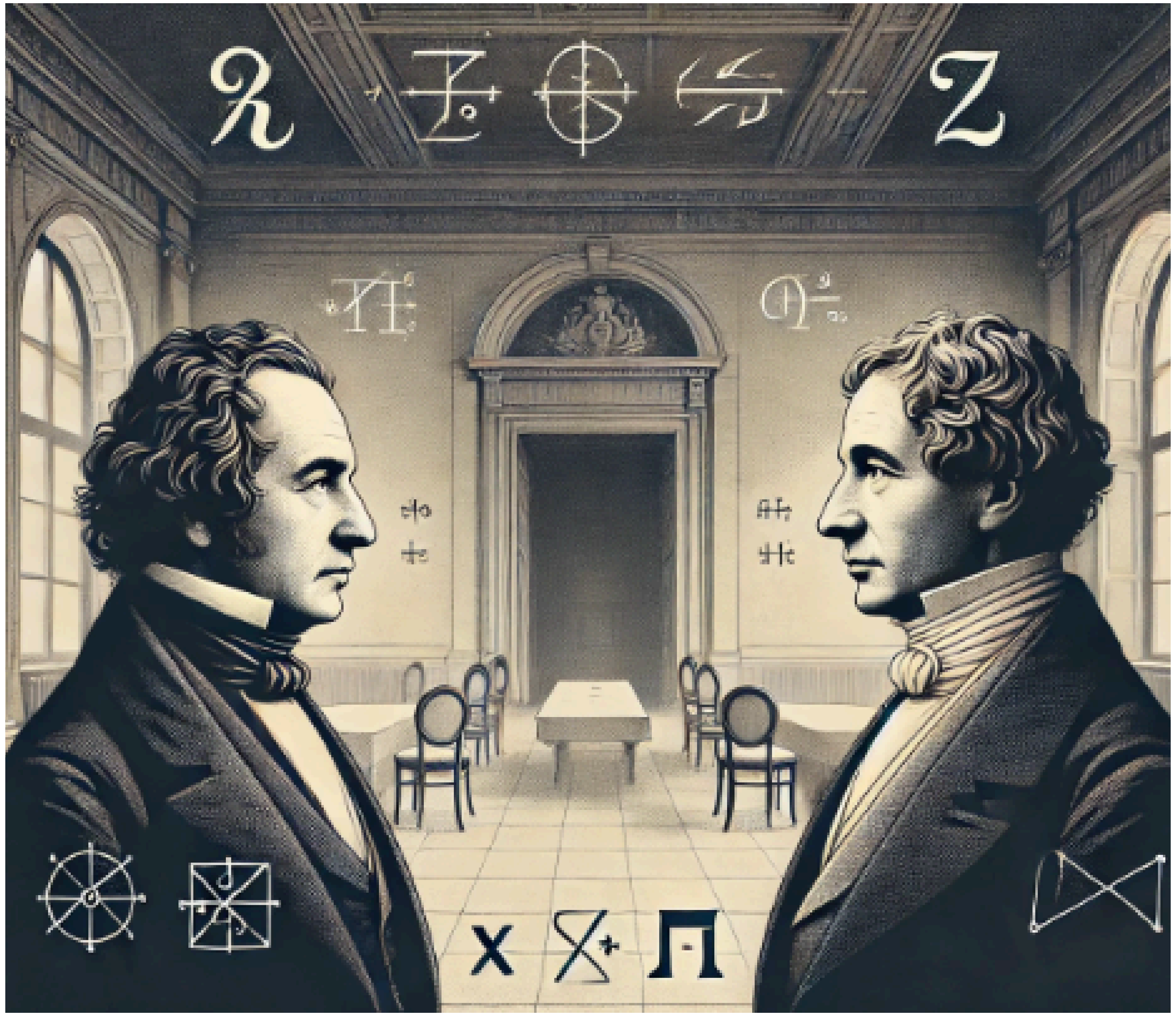
Un poco de historia...

- Euler fue el primero en estudiar la serie que define la función zeta, para valores reales mayores a 1.

- Al estudiar tal función, encontró la fórmula del producto de Euler.

- En 1859, Riemann retomó el estudio de la función, y extendió su estudio al plano complejo.

- A partir de esto, Riemann formuló la famosa “Hipótesis de Riemann”



Función zeta de Riemann

La función está dada por:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{ for }\boxed{\mathrm{Re}(s)>1}$$

En 1737, Eüler demostró que:

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

dónde p es primo.

Esta representación conecta directamente la función zeta con los números primos, mostrando cómo contiene información fundamental sobre su estructura y distribución.

TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Definición:

Sea $x \in \mathbb{N}$ entonces $\pi(x)$ está definido como:

$$\pi(x) = \#\{p \ni p \leq x : p \text{ } es \text{ } primo\}$$

Teorema:

Sea $x \in \mathbb{N}$ y $\pi(x)$ Entonces: $$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln(x)}{x} = 1$$

La función zeta de Riemann, fue utilizada para demostrar este teorema.

¿POR QUÉ SE LLAMA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN?

Extensión análitica

1 Se utiliza una representación integral válida para Re(s)>1

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

2 Utilizó la ecuación funcional para relacionar ζ(s) con ζ(1-s).

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

3 Extendió la función zeta de manera holomorfa al plano complejo completo (excepto en s=1).

garantizó que la función fuera infinitamente diferenciable

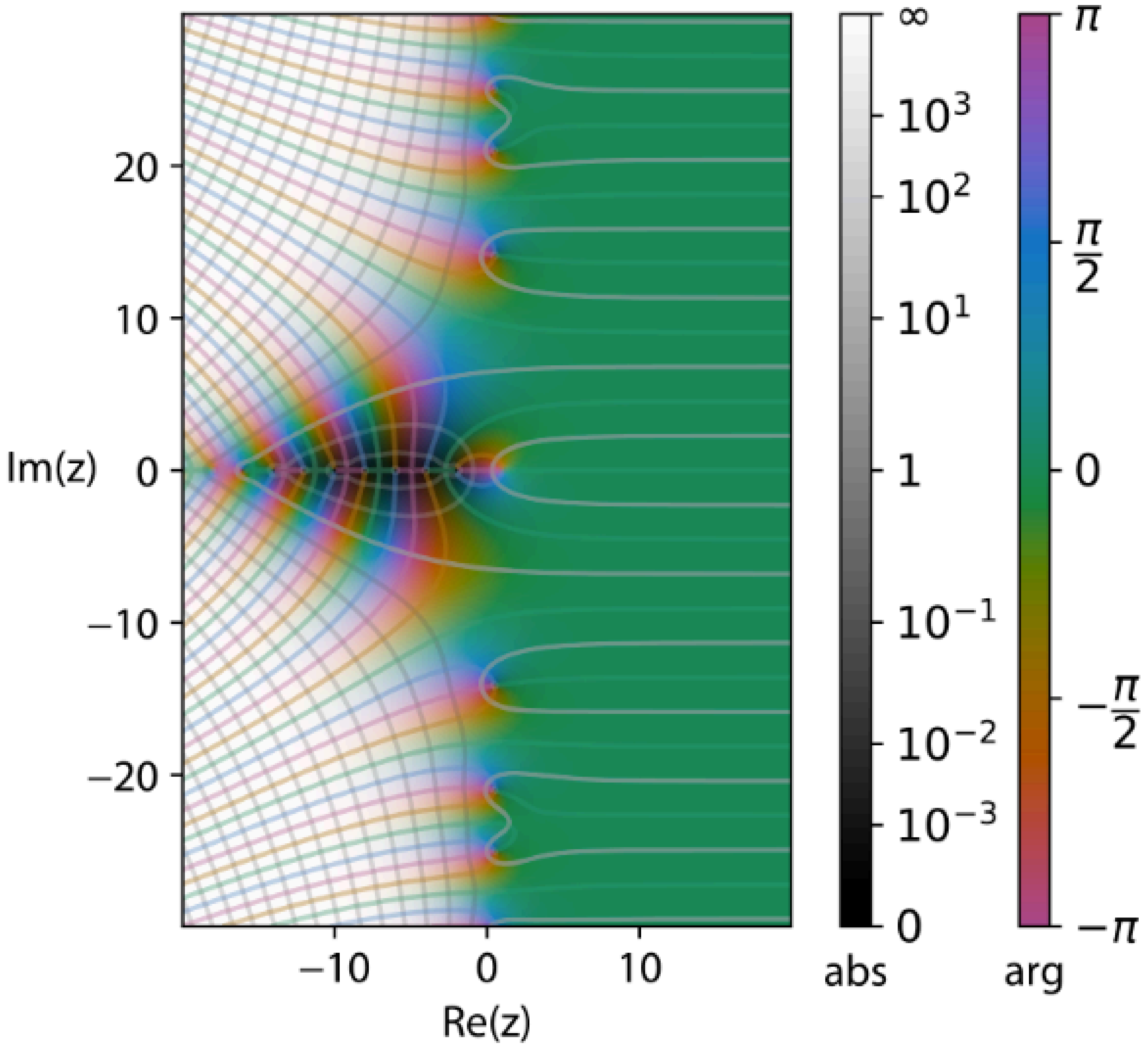
CEROS DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

CEROS TRIVIALES: $\{x: \ x \in (2\mathbb{Z}^-)\}$

CEROS NO TRIVIALES:

Proposición:

Sea $s \in dom(\zeta) - \{2\mathbb{Z}^-\}$ tal que $\zeta(s) = 0$, entonces $\underbrace{0 \leq Re(s) \leq 1}_{\text{conocida como } \textit{franja crítica}}$



Im(z)
Re(z)
20
10
0
−10
−20
−10
0
10
abs
∞
10^3
10^2
10^1
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
0
arg
π
$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

HIPÓTESIS DE RIEMANN

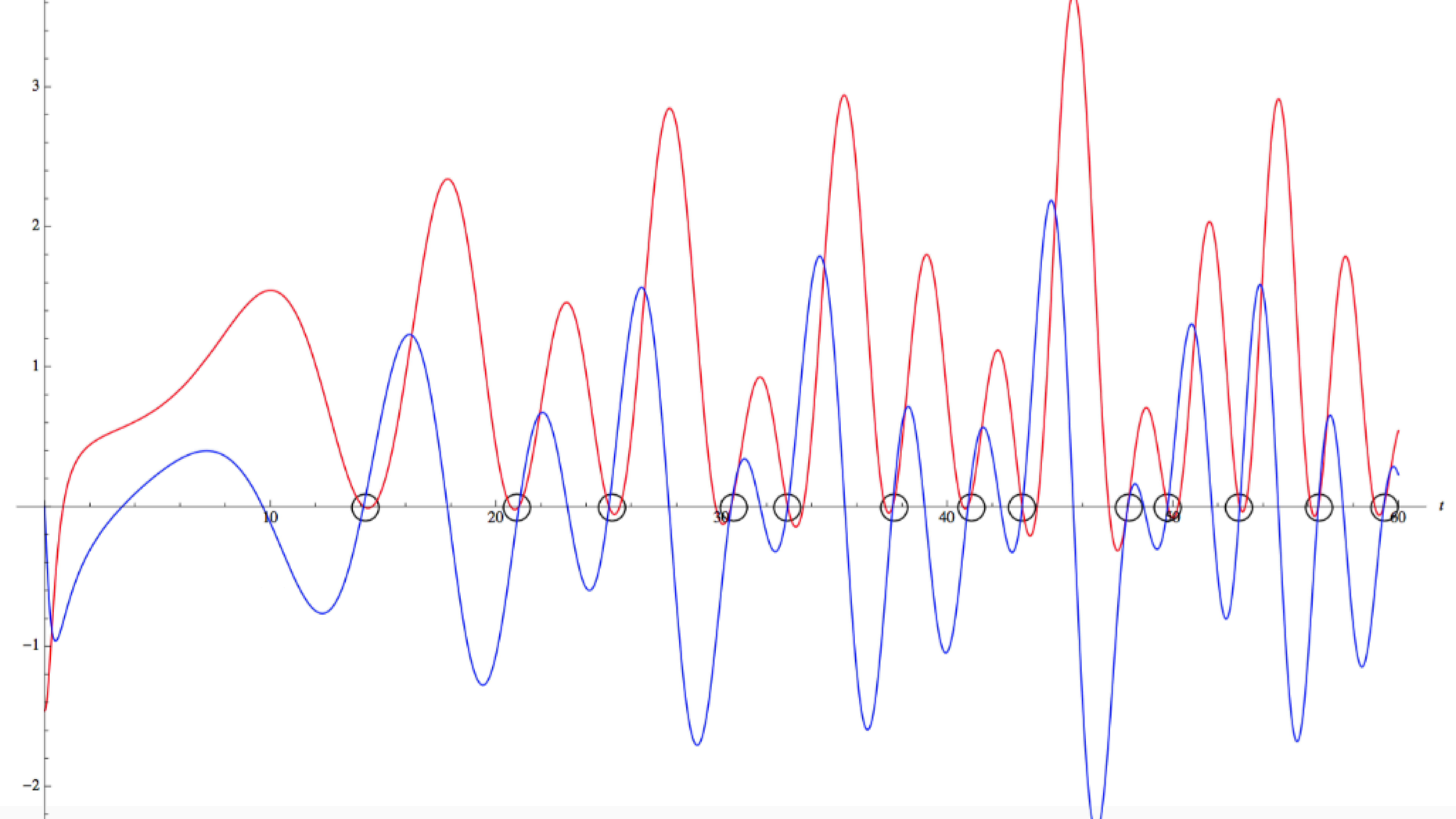
Dentro de la franja crítica, justo en medio se encuentra la conocida *línea crítica*, la cuál es aquella cuya parte real es igual a $\frac{1}{2}$

En 1859, Riemann formuló *la hipótesis de Riemann*.

Hipótesis de Riemann

Todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen la forma $\rho = \frac{1}{2} + it$, donde t es un número real.

En el año 2000, el Instituto Clay de Matemáticas declaró está hipótesis como uno de los problemas del milenio, pues nadie ha podido demostrarlo, ni encontrar un contra-ejemplo.



3
2
1
-1
-2
10
20
30
40
50
60
t

¿CÓMO SE RELACIONA CON LOS NÚMEROS PRIMOS?

¿CÓMO SE RELACIONA CON LOS NÚMEROS PRIMOS?

1. **Distribución de los números primos:**

La función $\pi(x)$ puede ser aproximada de dos formas, por el teorema de los números primos y por la función logaritmo integral.

Teorema de números primos:

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}}$$

Función Li(x):

$$\boxed{\mathrm{Li}(x) = \mathrm{PV}\left(\int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt\right)}$$

al ser una comportamiento asíntotico, se tienen diferencias en la estimación.

Si la hipótesis de Riemann es cierta, se podría asegurar que: $\boxed{\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\ln x)}$

¿CÓMO SE RELACIONA CON LOS NÚMEROS PRIMOS?

2. Función de Möbius:

Definición:

La *función acumulativa de Möbius* se define como: $$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

Teorema:

La hipótesis de Riemann es equivalente a que $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que: $$M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

Si la hipótesis de Riemann es verdadera, se tiene una restricción en el crecimiento de $M(x)$

¿CÓMO SE RELACIONA CON LOS NÚMEROS PRIMOS?

3. Límite en la distancia entre números primos

La hipótesis de Riemann puede establecer límites entre la diferencia de dos primos consecutivos.

Considere la sucesión de números primos (p_n) entonces, si la hipótesis de Riemann es verdadera, se tiene que:

$$\boxed{p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} ln(p_n))}$$

IMPORTANCIA DE LA HIPÓTESIS DE RIEMANN EN OTRAS ÁREAS

- **Funciones aritméticas:**
  Permite controlar el crecimiento y la distribución de varias funciones aritméticas.

- **Ecuaciones diofánticas:**
  Permite establecer límites superiores e inferiores más precisos para el número de soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas. Dando una estimación precisa de la cantidad de soluciones enteras en un intervalo dado.

- **Física Matemática:**
  Ha revelado conexiones sorprendentes con el caos cuántico, la teoría de matrices aleatorias, y potencialmente la teoría de cuerdas

CONCLUSIONES

SOBRE LA FUNCIÓN

La función zeta de Riemann conecta el análisis complejo y funcional con la teoría de números

SOBRE SUS CEROS

Conocer con exactitud la ubicación de los ceros no triviales de la función zeta permitiría una descripción detallada y exacta de cómo se distribuyen los números primos

SOBRE LA HIPÓTESIS

La Hipótesis de Riemann tiene implicaciones más del conteo de números primos afectando áreas como la física, las funciones aritméticas, y las ecuaciones diofánticas.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN