

Monstruous Moonshine

Montserrat Gil

Universidad del Valle de Guatemala

November 12, 2024

Introducción

- 1978
- John McKay
- Observa una coincidencia entre el j -invariante modular y la dimensión del menor de los espacios irreducibles del grupo Monstruo (M).

La expansión en serie de Fourier:

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

donde $q = e^{2\pi i\tau}$ y τ es un punto en el semiplano superior.

Grupo Monstruo

- Grupo esporádico más grande
- Orden aproximado de 8×10^{53}

Grupos esporádicos

Son 26 grupos excepcionales en la clasificación de los grupos finitos simples. Por teorema de clasificación de grupos simples, todo grupo finito simple es o uno de los 26 grupos simples esporádicos o pertenece a una de las familias (grupo cíclico con orden primo, grupo alternante de grado al menos 5, grupo de Lie simple).

Propiedades del Grupo Monstruo

- Dimensión del menor espacio de representación no trivial: 196883
- Es simple, es decir, no tiene subgrupos normales distintos de los triviales
- Su estructura algebraica genera extensiones modulares en varias dimensiones.
- Sus simetrías son altamente relevantes para la física teórica y ciertas teorías de campos.

Características

- Es el miembro más complejo de los grupos finitos simples
- Es particularmente importante porque su complejidad y estructura tienen conexiones con otras áreas.

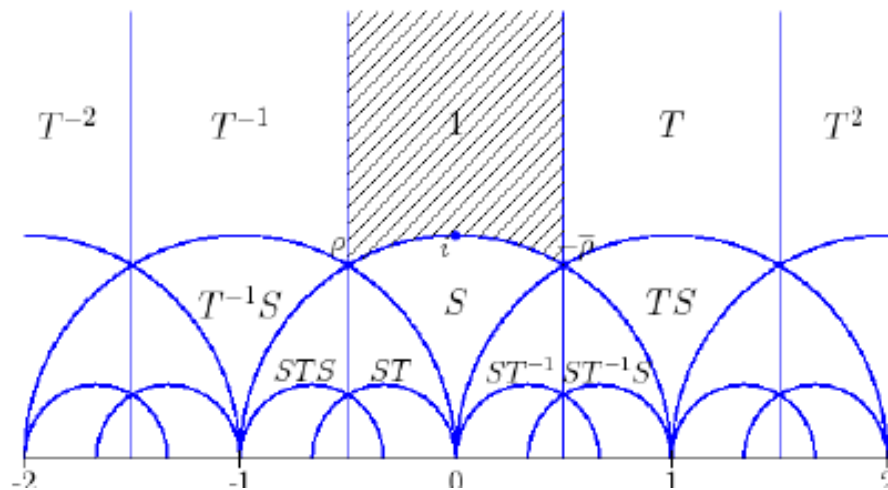
Funciones Modulares

- Funciones complejas invariantes bajo la acción del subgrupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$. Este grupo actúa en el semiplano superior de los números complejos y aparece en la teoría de números, la geometría compleja y la física teórica.

$SL(2, \mathbb{Z})$

Significa Special Linear Group. Representa el conjunto de las matrices 2×2 con coeficientes enteros y determinante igual a 1.

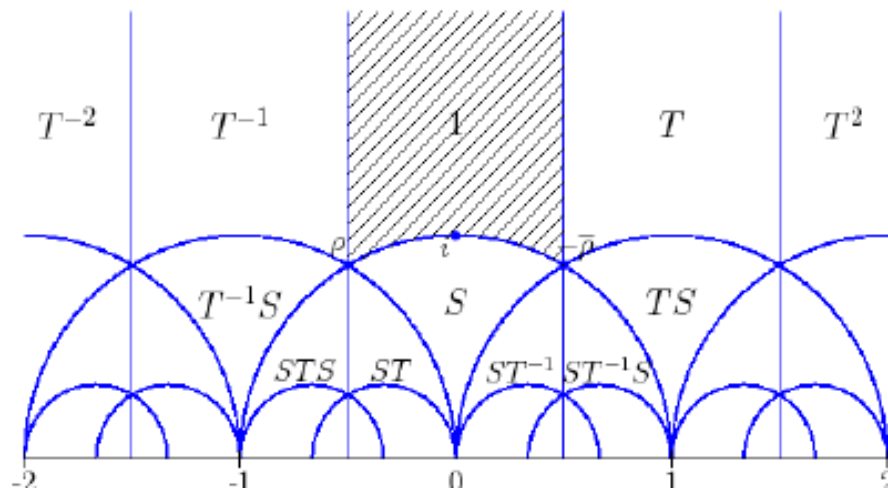
$SL(2, \mathbb{Z})$



$SL(2, \mathbb{Z})$

- Región fundamental
- Área en el semiplano superior donde cada punto es representativo
- Cualquier otro punto puede obtenerse $\rightarrow$ transformaciones del grupo
- El grupo puede ser generado usando solo dos matrices específicas, denominadas S y T
- S inversión, lleva τ a $-\frac{1}{\tau}$
- T horizontal, lleva τ a $\tau + 1$

$SL(2, \mathbb{Z})$



j -invariante

Función modular de peso cero para el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$.

Es una función invariante bajo las transformaciones de este grupo.

τ se encuentra en el semiplano superior de los números complejos.

Simetría:

- El valor de $j(\tau)$ no cambia al aplicar transformaciones especificadas por el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$

Importancia de j

Clasifica a las curvas elípticas, actúa como identificador.

- Dos curvas elípticas son distintas si y solo si tienen diferentes valores de j

Expansión en serie de Fourier

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

donde $q = e^{2\pi i\tau}$ y τ es un punto en el semiplano superior.

Conjetura de Monstrous Moonshine

Establece que:

- Existe una conexión entre la teoría de grupos finitos (en particular el grupo Monstruo) y las funciones modulares (específicamente el j -invariante)
- La conjetura sugiere que cada uno de los coeficientes en la expansión en serie del j -invariante está vinculado a las dimensiones de las representaciones del grupo Monstruo.
- Además también existe la hipótesis de que se pueden definir funciones modulares para cada clase de conjugación del Monstruo, estas llamadas funciones de Moonshine

Conjetura

- Primera observación: $196884 = 1 + 196883$
- Luego surgieron coincidencias similares, cada coeficiente parecía coincidir con combinaciones específicas de dimensiones de representaciones del grupo Monstruo.

Conjetura

John McKay descubrió que los primeros términos de la expansión de Fourier ya mencionada anteriormente, podrían expresarse como combinaciones lineales de las dimensiones de las representaciones irreducibles r_n del grupo monstro M con coeficientes pequeños no negativos. Sea

$$r_n = 1, 196883, 21296876, 842609326, 18538750076 \dots$$

entonces,

$$1 = r_1$$

$$196884 = r_1 + r_2$$

$$21493760 = r_1 + r_2 + r_3$$

$$864299970 = 2r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4$$

$$20245856256 = 3r_1 + 3r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5$$

Conjetura

- John Conway y Simon Norton propusieron que para cada clase de conjugación del Monstruo debería haber una función modular asociada.

Importancia

- La conjetura implica que el grupo Monstruo y las funciones modulares no solo están relacionados de manera casual
- La relación de el grupo Monstruo con la función modular j sugiere que podría haber un "universo" matemático completo en el que el Monstruo actúa como una simetría fundamental. En otras palabras, el Monstruo podría ser capaz de organizar un conjunto completo de objetos matemáticos o funciones, como las funciones modulares, a través de sus representaciones y simetrías.

"Moonshine"

Este termino surgió ya que parecía casi "fantasioso" o "mágico" que existiera tal conexión entre el grupo Monstruo y el j -invariante. Por otro lado, Conway y Norton formalizaron la Conjetura Monstrous Moonshine en un artículo de 1979.

Demostración

Veremos la demostración hecha por Richard Borcherds.

- Publicada en 1992
- Matemático inglés

Idea general de la demostración

- Álgebras de Kac-Moody generalizadas: extensiones de las álgebras de Lie que permiten tener raíces simples imaginarias.

Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial sobre un campo junto con una operación bilineal que cumple con asimetría y la identidad de Jacobi.

Antisimetría: $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$

Identidad de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

Las álgebras de Lie son fundamentales para el estudio de simetrías y en la teoría de grupos de Lie, utilizados en física teórica.

Idea general de la demostración

- Borchers demostró que se podía construir una "superálgebra de Lie" cuya estructura contenía información tanto sobre el j -invariante como sobre el grupo Monstruo.
- La superálgebra reflejaba las simetrías del Monstruo y al mismo tiempo capturaba la estructura de los coeficientes de las funciones modulares asociadas.

Impacto de la demostración

- Validó la conjetura de Monstrous Moonshine
- Abrió una nueva área de investigación que conecta la teoría de grupos, las funciones modulares y la física matemática.
- Estudio más profundo de las álgebras de Lie y sus aplicaciones en otros campos
- Inspiró nuevos desarrollos en la teoría de grupos esporádicos y la teoría de formas modulares.

Conexión con la física matemática

- Teoría Conforme de Campos
- Interpretación Física del Grupo Monstruo
- Relación con la Teoría de Cuerdas
- Moonshine Generalizado y Nuevas Investigaciones en Física

Conclusión

La Conjetura Monstrous Moonshine comenzó como una observación numérica y se transformó en una conexión entre la teoría de grupos y la teoría de números, áreas que antes se consideraban independientes.

Referencias:

- Borcherds, R. E. (1992). Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras. *Inventiones Mathematicae*, 109(1), 405-444.
<https://doi.org/10.1007/BF01232032>
- Conway, J. H., Norton, S. P. (1979). Monstrous Moonshine. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 11(3), 308-339.
<https://doi.org/10.1112/blms/11.3.308>
- Duncan, J. F., Griffin, M. J., Ono, K. (2015). Moonshine. *Research in the Mathematical Sciences*, 2(1), 11.
<https://doi.org/10.1186/s40687-015-0029-6>
- Gannon, T. (2023). Moonshine beyond the Monster: The Bridge Connecting Algebra, Modular Forms and Physics (1.^a ed.). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/9781009401548>