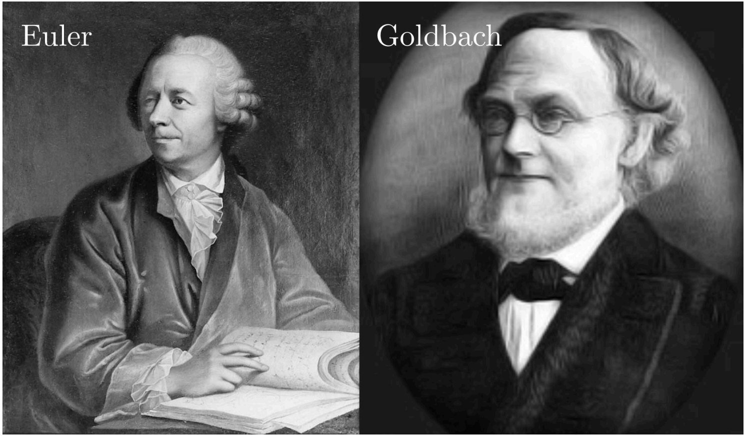
La Conjetura de Golbach
¿Lo qué no sabemos de los números primos?

Sharis Barrios García 221370

Noviembre 2024

Tabla de Contenidos

Historia



Como cualquier par de amigos matemáticos en 1742, una carta dio inicio a un gran problema sin resolver.

Conjetura Fuerte y Débil

La Conjetura de Goldbach es una hipótesis matemática propuesta en 1742 por Christian Goldbach.

Conjetura fuerte de Goldbach

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos.

$$8 = 3 + 5$$

Conjetura débil de Goldbach

Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como la suma de tres números primos.

$$7 = 2 + 2 + 3$$

¿Por qué se piensa que la conjetura es cierta?

Teorema Dirichlet

En cualquier progresión aritmética de la forma $ak + q$, donde k es un entero y a y q son enteros coprimos (es decir, $\gcd(a, b) = 1$), hay infinitos números primos

Esto asegura una buena distribución de los primos, facilitando la representación de pares como suma de dos primos en muchos casos.

¿Qué es una Progresión Aritmética?

Definición:

- Una **progresión aritmética** es una secuencia de números en la que la diferencia entre términos consecutivos es constante.
- Esta diferencia constante se llama **diferencia común**.

Fórmula General:

$$a_n = a + (n - 1) \cdot d$$

donde:

- a: primer término.
- d: diferencia común.
- n: posición del término.

Progresiones Aritméticas y Teoría de Números

Relación con la Teoría de Números:

- Las progresiones aritméticas se usan para estudiar los números primos.
- Progresión aritmética general: $a, a+q, a+2q, \ldots$, donde:

$$a + nq \equiv a \pmod{q}.$$

Ejemplo:

- Progresión con $a = 1$ y $q = 4$:

$$1, 5, 9, 13, 17, \ldots$$

Conceptos y Teoremas

Conceptos

Densidad de Schnirelmann

Mide cuán "denso" o completo es el conjunto en términos de los números naturales. Formalmente, para un conjunto A de números naturales, la densidad de Schnirelmann, $\sigma(A)$, se define como:

$$\sigma(A) = \inf\left\{\frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

Midiendo la proporción mínima de números en el conjunto A respecto a todos los números naturales hasta un cierto valor n, evaluando esta proporción en los valores crecientes de n.

Conceptos

Casi primo

Es un número natural n escrito en la forma $n = p^1 \cdots p^k$. Donde los p^i son números primos (no necesariamente distintos) y $k \geq 1$ y k es una constante. También, es conocido como un número que es producto de pocos primos.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Semiprimo

Es un tipo especial de casi primo ya que es un número entero positivo que es el producto de exactamente dos números primos.

$$6 = 2 \cdot 3$$

Teoremas importantes

Teorema de Vinogradov (1937)

Todo número impar suficientemente grande puede expresarse como la suma de tres primos, sin necesidad de asumir la Hipótesis de Riemann. Es decir, existen primos p_1, p_2, y p_3 tales que $N = p1 + p2 + p3$.

¿Qué tan grande es "suficientemente grande"?

- **Cota Original de Vinogradov**: Indefinida, pero extremadamente grande.
- **Refinamientos Posteriores:**
  - **Chen y Wang (1989):** $N > 10^{43000}$.
  - **Deshouillers et al. (1997):** (usando la Hipótesis Generalizada de Riemann): $N > 2 \times 10^{12}$.

Conclusión:

- La cota original hace que el teorema sea aplicable solo para números grandes.

Teoremas importantes

Teorema de Ramaré (1995)

Todo número par se puede expresar como la suma de, como máximo, seis primos. Este resultado es una generalización que no depende de la Hipótesis de Riemann.

Teoremas importantes

Teorema de Chen (1966)

Todo número par suficientemente grande puede escribirse como la suma de un primo y un "semi primo" (número que es primo o el producto de dos primos).

Hipótesis de Rieman

La **Hipótesis Generalizada de Riemann** es una extensión de la Hipótesis de Riemann original y afirma que:

> *Todos los ceros no triviales de cualquier función L-serie de Dirichlet tienen su parte real igual a* $\frac{1}{2}$.

En otras palabras, al igual que la función zeta de Riemann, los ceros no triviales de las L-series (que están relacionadas con los números primos en progresiones aritméticas) también se encuentran en la línea crítica

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}.$$

Impacto en la distribución de números primos:

- La función zeta de Riemann permite estimar el número de primos menores o iguales a un número x, representado como $\pi(x)$.
- Bajo la hipótesis de Riemann, el error en la fórmula de conteo de primos es extremadamente pequeño:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{Error},$$

donde el término de error es:

$$\mathrm{Error} \sim \sqrt{x}\log(x).$$

- Esto implica que los números primos están distribuidos de forma más regular de lo que sería posible sin la hipótesis.

Hipótesis de Rieman

Teorema de Hardy-Littlewood (1923)

Si la **Hipótesis Generalizada de Riemann** es cierta, el número de representaciones de n como suma de tres primos es aproximadamente proporcional a $\frac{n^2}{\log^3 n}$.

Teorema de Deshouillers et al.

Bajo la Hipótesis Generalizada de Riemann, se probó que **todo número impar mayor que 5 puede escribirse como suma de tres primos.**

Trabajo a lo largo de los años

Avances

- **Hardy y Littlewood (1924):** Bajo la hipótesis generalizada de Riemann, demostraron que el número de números pares hasta X que violan la conjetura de Goldbach es insignificante.

- **Lev Schnirelmann (1930):** Estableció que cualquier número natural mayor que 1 puede expresarse como la suma de no más de C números primos, con C siendo una constante computable (**densidad de Schnirelman**).

- **Nikolai Chudakov, Van der Corput, y Estermann (1937-1938):** Demostraron que casi todos los números pares pueden escribirse como la suma de dos primos utilizando **el método de Vinogradov.**

Avances

- **Alfréd Rényi (1948):** Demostró que todo número par suficientemente grande puede escribirse como la suma de un primo y **un casi primo.**
- **Yuri Linnik (1951):** Demostró la existencia de una constante K tal que todo número par suficientemente grande es la suma de dos primos y como máximo K potencias de 2.
- **Chen Jingrun (1973):** Utilizando la teoría de tamices, demostró que todo número par suficientemente grande puede ser la suma de dos primos o de un primo y **un semiprimo.**

Avances

- **Hugh Lowell Montgomery y Bob Vaughan (1975):** Probaron que ”la mayoría” de los números pares pueden expresarse como la suma de dos primos.
- **Olivier Ramaré (1995):** Mejoró el resultado de Schnirelmann al demostrar que todo número par $n \geq 4$ es la suma de como máximo 6 primos.
- **Roger Heath-Brown y Jan-Christoph Schlage-Puchta (2002):** Bajo la hipótesis de Riemann generalizada, demostraron que K = 7 también es una constante válida.

Avances computacionales

La comprobación de la conjetura hasta números pares muy grandes se ha logrado mediante el uso de algoritmos eficientes y ordenadores potentes.

Autor	Año	Límite superior
A. Desboves	1855	$10,000$
N. Pipping	1940	$100,000$
M. K. Shen	1964	3.3×10^7
Stein – Stein	1965	10^8
A. Granville et al.	1989	2×10^{10}
Richstein	2001	4×10^{14}
Oliveira e Silva	2008	12×10^{17}
Oliveira e Silva	2012	4×10^{18}

1/ 2 por Harald Helfgott

Demostración

Harald Helfgott
Matemático Peruano

En 2013, el matemático **Harald Helfgott** logró **demostrar la conjetura débil de Goldbach** combinando métodos teóricos y computacionales. Y desde 2015, la afirmación es ampliamente aceptada.

Estrategia de la Prueba de Helfgott

1. **Verificación computacional para casos menores**:
    - Helfgott verificó computacionalmente la conjetura para todos los números impares menores que 10^{30}.
    - Esto asegura que la conjetura débil de Goldbach se cumple en este rango sin necesidad de análisis adicionales.
2. **Prueba analítica para casos grandes**:
    - Para números mayores o iguales a 10^{30}, Helfgott utilizó el **método del círculo de Hardy-Littlewood-Vinogradov** y mejoras en las estimaciones de los arcos menores y mayores.

Método del Círculo de Hardy-Littlewood-Vinogradov

- El método del círculo se utiliza para resolver problemas aditivos relacionados con números primos.
- Se divide en **arcos principales** y **arcos menores**:
  - **Arcos principales**: Regiones donde la función generadora de números primos tiene comportamiento predecible.
  - **Arcos menores**: Zonas complementarias que presentan desafíos por el comportamiento errático de la distribución de los primos.

Método del Círculo de Hardy-Littlewood-Vinogradov

La expresión del método del círculo es:

$$r_3(n) = \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} \, d\alpha,$$

donde $S(\alpha) = \sum_{p \leq n} e^{2\pi i \alpha p}$ es conocida como el **método de Vinogradov.** Y $r_3(n)$ representa el número de formas en que n puede expresarse como la suma de tres primos.

Criba de Brun

- Se emplean técnicas de criba, especialmente para analizar las representaciones en los arcos menores. Donde se usa para filtrar números y enfocarse en aquellos con propiedades específicas.

Definición Matemática de la Criba de Brun

Sea A un conjunto de enteros positivos hasta un límite x y P un conjunto de los k primeros primos. La criba de Brun se utiliza para estimar el número de elementos en A que no son divisibles por ningún primo en P, denotado como $S(A, P)$.

Fórmula de la criba de Brun:

$$S(A, P) \approx |A| - \sum_{p \in P} |A_p| + \sum_{\substack{p,q \in P \\ p<q}} |A_{p,q}| - \sum_{\substack{p,q,r \in P \\ p<q<r}} |A_{p,q,r}| + \cdots$$

donde:

- $|A_p|$ es el número de elementos en A divisibles por p,
- $|A_{p,q}|$ es el número de elementos en A divisibles por p y q,
- En general, $|A_{p_1,p_2,\ldots,p_m}|$ es el número de elementos en A divisibles por todos los primos $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Definición Matemática de la Criba de Brun

Aproximación Simplificada:

$$S(A, P) \approx x \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Esta expresión estima el número de elementos en A que no son divisibles por ninguno de los primos en P.

Conclusión de la Prueba

- Al combinar la verificación computacional para los números impares menores a 10^{30} y la prueba analítica para los números mayores, Helfgott completó la prueba de la conjetura débil de Goldbach.
- Su trabajo es una combinación de técnicas analíticas avanzadas, como el manejo preciso de los arcos menores, junto con herramientas computacionales para cubrir casos individuales.

Gracias