Formas Modulares y sus q-extensiones en Teoría de Números

Manuel Alejandro Martínez Flores

Noviembre 2024

Contenido

Definiciones Previas

Def.

Sea el hemiplano $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}(w) > 0\}$

Definiciones Previas

Def.

Sea el hemiplano $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}(w) > 0\}$

Def.

Sea $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \det(\gamma) = 1\}$

Definiciones Previas

Def.

Sea el hemiplano $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}(w) > 0\}$

Def.

Sea $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \det(\gamma) = 1\}$

A menos que se indique lo contrario, se considerará

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Def.

Dados $w \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, se define la acción:

$$\gamma w = \frac{aw + b}{cw + d}$$

Acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Def.

Dados $w \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, se define la acción:

$$\gamma w = \frac{aw + b}{cw + d}$$

Notemos que $\gamma\mathbb{H} \subset \mathbb{H}$. Además,
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ generan $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Forma Modular

Def

Una forma modular $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de peso k entero respecto a $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene las siguientes tres propiedades:

Forma Modular

Def

Una forma modular $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de peso k entero respecto a $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene las siguientes tres propiedades:

1. f es holomorfa (analítica)

Forma Modular

Def

Una forma modular $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de peso k entero respecto a $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene las siguientes tres propiedades:

1. f es holomorfa (analítica)
2. $f(\gamma w) = (cw + d)^k f(w)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbb{H}$

Forma Modular

Def

Una forma modular $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de peso k entero respecto a $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene las siguientes tres propiedades:

1. f es holomorfa (analítica)
2. $f(\gamma w) = (cw + d)^k f(w)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbb{H}$
3. f es acotada cuando $\mathbf{Im}(w) \to \infty$

Forma Modular

Def

Una forma modular $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de peso k entero respecto a $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene las siguientes tres propiedades:

1. f es holomorfa (analítica)
2. $f(\gamma w) = (cw + d)^k f(w)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbb{H}$
3. f es acotada cuando $\mathbf{Im}(w) \to \infty$

Las formas modulares de peso k forman un espacio vectorial $\mathcal{M}_k(\Gamma)$

Serie de Fourier

Notemos que de la condición (2) implica que $f(w+1) = f(Tw) = f(w)$, por lo que las formas modulares respecto a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tienen periodo 1 y tiene sentido hablar de su serie de Fourier.

$$f(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n w}$$

Que notemos
$f(w+1) = \sum a_n e^{2\pi i n w} e^{2\pi i n} = \sum a_n e^{2\pi i n w} = f(w)$

Serie de Fourier

Notemos además, que como como es acotada cuando $\mathbf{Im}(w) \to \infty$, se tiene que:

$$f(i\infty) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi n\infty} = \sum_{n\leq 0} a_n e^{-2\pi n\infty} < \infty$$

Serie de Fourier

Notemos además, que como como es acotada cuando $\mathbf{Im}(w) \to \infty$, se tiene que:

$$f(i\infty) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi n\infty} = \sum_{n\leq 0} a_n e^{-2\pi n\infty} < \infty$$

Por lo que se puede concluir que $a_n = 0$ para $n < 0$

q-extensión

Entonces sea $q = e^{2\pi i w}$ en la serie de Foruier de f.
Por lo que podemos expresar:

q-extensión

Entonces sea $q = e^{2\pi i w}$ en la serie de Foruier de f. Por lo que podemos expresar:

Def

Se le llama q-extensión de f a

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

q-extensión

Entonces sea $q = e^{2\pi i w}$ en la serie de Foruier de f.
Por lo que podemos expresar:

Def

Se le llama q-extensión de f a

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

Esto es solo una redefinición de f como

$$f^*(q) = f\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right)$$

Funciones de Eisenstein

Un ejemplo de formas modulares son las funciones de Eisenstein:

$$G_k(w) = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mw+n)^k}$$

Funciones de Eisenstein

Un ejemplo de formas modulares son las funciones de Eisenstein:

$$G_k(w) = \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mw+n)^k}$$

Como S, T generan $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, se puede verificar que $G_k(Tw) = G_k(w)$ y que $G_k(Sw) = w^k G_k(w)$

Convergencia de las funciones de Eisenstein

Además, se puede verificar que para $k \geq 4$ par éstas convergen uniformemente a

$$G_k(w) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

Donde $\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$.

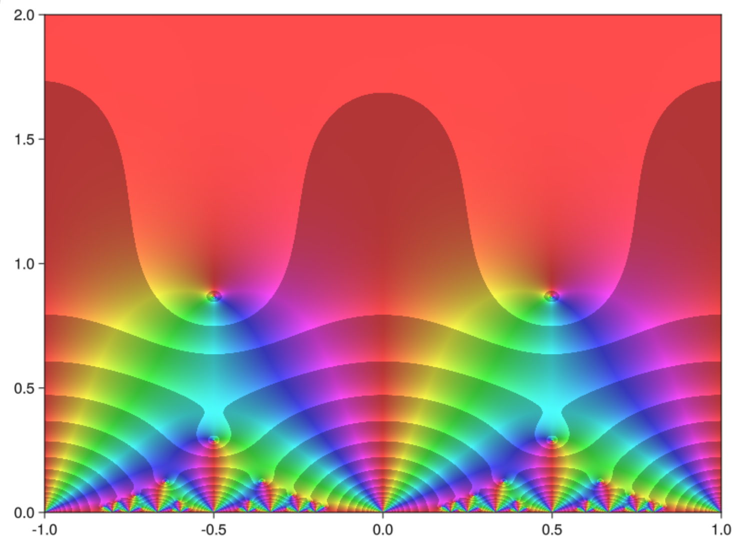
Convergencia de las funciones de Eisenstein

Además, se puede verificar que para $k \geq 4$ par éstas convergen uniformemente a

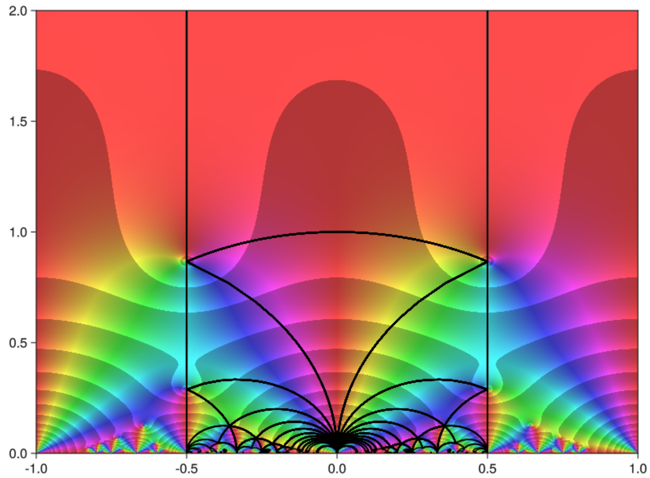
$$G_k(w) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

Donde $\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$. Notemos que $G_k(i\infty) = 2\zeta(k)$. Generalmente se considera la versión estandarizada $E_k = G_k/2\zeta(k)$

G_4



G_4 y el Dominio Fundamental



$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{H} : |\mathbf{Re}(w)| < 1/2, \ |w| > 1\}$$

Pequeño resultado

Estas series son bastante útiles. Por ejemplo, se sabe que $\mathcal{M}_8(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ es un espacio de dimensión 1, por lo que $E_8 = E_4^2$. Luego de realizar la expansión se resulta en:

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\sigma_3(n-k)$$

Problema de los k cuadrados

Sea $r(n,k)$ la cantidad de formas de expresar a n como suma de k cuadrados.

Problema de los k cuadrados

Sea $r(n,k)$ la cantidad de formas de expresar a n como suma de k cuadrados.
Nótese que si $k = a + b$, entonces

$$r(n,k) = \sum_{m=0}^{n} r(m,a)r(n-m,b)$$

Problema de los k cuadrados

Sea $r(n,k)$ la cantidad de formas de expresar a n como suma de k cuadrados.
Nótese que si $k = a + b$, entonces

$$r(n,k) = \sum_{m=0}^{n} r(m,a)r(n-m,b)$$

Por lo que tiene sentido definir

$$\theta(w,k) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n,k)q^n$$

Problema de los 4 cuadrados

Se puede notar que $\theta^4(w,1) = \theta(w,4)$ es una forma modular de peso 2 respecto a

$$\Gamma_0(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Problema de los 4 cuadrados

Se puede notar que $\theta^4(w,1)=\theta(w,4)$ es una forma modular de peso 2 respecto a

$$\Gamma_0(4)=\left\langle \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Además, se puede verificar que $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$ tiene dimensión 2

Problema de los 4 cuadrados

Por lo anterior, se puede concluir que $\theta(w,4)$ coincide con

$$E_{2,4}(w) = \frac{4}{\pi^2}G_2(4w) - \frac{1}{\pi^2}G_2(w)$$

Problema de los 4 cuadrados

Por lo anterior, se puede concluir que $\theta(w, 4)$ coincide con

$$E_{2,4}(w) = \frac{4}{\pi^2} G_2(4w) - \frac{1}{\pi^2} G_2(w)$$

Haciendo los cálculos e igualando términos se puede concluir que

$$r(n, 4) = 8 \sum_{4 \nmid d \mid n} d$$

Problema de los 4 cuadrados

Abusando de notación, esto se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$r(n,4) = 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4)$$

Problema de los 4 cuadrados

Abusando de notación, esto se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$r(n,4) = 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4)$$

Pero, ¿por qué es tan importante el 4?

Problema de los 4 cuadrados

Notemos que si $4|n$ y $n/4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, claramente también se tiene que $n/4 = (-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2$

Problema de los 4 cuadrados

Notemos que si $4|n$ y $n/4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, claramente también se tiene que
$n/4 = (-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2$

Pero
$4 = 1^2+1^2+1^2+1^2 = (-1)^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2$

Problema de los 4 cuadrados

Por lo que al aplicar el Lema de Euler se llega que n es igual a

$$(a+b+c+d)^2 + (a-b-c-d)^2 +$$

$$(a+b-c-d)^2 + (a-b+c-d)^2$$

Problema de los 4 cuadrados

Por lo que al aplicar el Lema de Euler se llega que n es igual a

$$(a+b+c+d)^2 + (a-b-c-d)^2 +$$

$$(a+b-c-d)^2 + (a-b+c-d)^2$$

Por lo que el 4 no es muy bueno para generar sumas de 4 cuadrados nuevas y es una "simetría" en el problema.

Referencias

- A. Mine, "MODULAR FORMS AND APPLICATIONS IN NUMBER THEORY." *UChicago* [Online].
- J. Cepelewicz, "Behold Modular Forms, the 'Fifth Fundamental Operation' of Math | Quanta Magazine," *Quanta Magazine*, Sep. 21, 2023.
- S. Shrivastava, "Introduction to Modular Forms Lectures by Dipendra Prasad." [Online]