Teoría de Números 2024

Lista 03

19.agosto.2024

1. Si p es un primo que satisface $n < p < 2n$, muestre que
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. Comprobar que
   a) $53^{103} + 103^{53}$ es divisible por 39,
   b) $111^{333} + 333^{111}$ es divisible por 7.

3. Asumiendo que $495 \mid 273x49y5$, encontrar los dígitos x y y.

4. Pruebe que para todo $n > 2$, se cumple que $\displaystyle\sum_{(k,n)=1 \;\; 1\leq k\leq n} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

5. a) Dar el criterio de divisibilidad de $n \in \mathbb{N}$ por 3 y por 8 cuando los dígitos de n se escriben en base 9.
   b) ¿Es el entero $(447836)_9$ divisible entre 3? ¿Y entre 8?

6. a) Construya un criterio de divisibilidad entre 59.
   b) Utilice el criterio anterior para verificar si los números $45843, 19641$ y 32763 son divisibles entre 59.

7. sea $m \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, y sean a y b enteros primos relativos a m. Si x y y son eneros tales que
$$a^x \equiv b^x \pmod{m} \qquad \text{y} \qquad a^y \equiv b^y \pmod{m}$$
entonces
$$a^{(x,y)} \equiv b^{(x,y)} \pmod{m}.$$

8. Mostrar que:
   a) Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ son ambos sistemas completos de residuos módulo n, entonces $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\}$ no es un sistema completo de residuos.
   b) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $\{a, 2a, 3a, \ldots, na\}$ es un sistema completo de residuos módulo n si, y sólo si, $(a, n) = 1$.
   c) Si $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ es un sistema completo de residuos módulo n, y $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $(a, n) = 1$, entonces
$$T = aS + b = \{ar_1 + b, ar_2 + b, \ldots, ar_n + b\}$$
   es también un sistema completo de residuos módulo n.

9. Usar congruencias para verificar si

$$89 \mid 2^{44} - 1 \qquad \text{y} \qquad 97 \mid 2^{48} - 1.$$

10. Implementar en Python el algoritmo para el cálculo de potencias módulo n mediante exponenciación binaria (potenciación modular). Usarlo para calcular las siguientes:

    a) $123^{456} \pmod{789}$,

    b) $2024^{1001} \pmod{4202}$,

    c) $12345678901234567890^{10293847561029384756} \pmod{9876543210987654321}$.
