

## **ESTIMATIVAS SOBRE PRIMOS**

ALAN REYES-FIGUEROA  
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 37) 11.NOVEMBER.2024

# Estimativas sobre Primos

Complementamos es estudio asintótico de las funciones aritméticas con algunas estimativas sobre el comportamiento de los números primos.

Comenzamos con el siguiente resultado.

## Lema

Sea  $n \in \mathbb{N}$  un número natural, y sea  $p$  primo. Sea  $\theta_p$  el entero tal que  $p^{\theta_p} \leq 2n < p^{\theta_p+1}$ . Entonces, el exponente de la mayor potencia de  $p$  que divide  $\binom{2n}{n}$  es menor o igual a  $\theta_p$ . En particular, si  $p > \sqrt{2n}$ , entonces el exponente de esta máxima potencia de  $p$  es menor o igual a 1. Además, si  $\frac{2}{3}n < p < n$ , entonces  $p$  no divide a  $\frac{2n}{n}$ .

Prueba: Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los exponentes de las mayores potencias de  $p$  que dividen  $(2n)!$  y  $n!$ , respectivamente.

Sabemos que

$$\alpha = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^3} \right\rfloor + \dots, \quad \beta = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

# Estimativas sobre Primos

Portanto, el exponente de la mayor potencia de  $p$  que divide a  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  es

$$\alpha - 2\beta = \sum_{i=1}^{\theta_p} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right).$$

Pero, como

$$\frac{2n}{p^i} \geq \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor > \frac{2n}{p^i} - 1, \text{ y } -2 \left( \frac{n}{p^i} - 1 \right) > -2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \geq -2 \frac{n}{p^i},$$

sumando obtenemos que

$$2 > \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \geq -1.$$

Así, esta última expresión sólo puede tomar los valores 0 ó 1. Concluimos que

$$\alpha - 2\beta \leq \sum_{i=1}^{\theta_p} 1 = \theta_p.$$

Además, si  $\frac{2}{3}n < p < n$ , entonces  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1 \implies \alpha - 2\beta = 0$ .  $\square$

# Teorema de Chebyshev

Introducimos la función aritmética  $\pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$\pi(x) = \#\{p : p \text{ es primo y } p \leq x\} = \text{número de primos } \leq x.$$

## Teorema (Chebyshev)

Existen constante positivas  $0 < c < C$  tales que

$$c \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C \frac{x}{\log x}.$$

Prueba: Observemos inicialmente que  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  es múltiplo de todos los primos  $p$  que satisfacen  $n < p \leq 2n$ .

Como

$$\binom{2n}{n} < \sum_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n},$$

entonces se sigue que el producto de dos primos entre  $n$  y  $2n$  es menor que  $2^{2n}$ .

# Teorema de Chebyshev

Como hay exactamente  $\pi(2n) - \pi(n)$  primos entre  $n$  y  $2n$ , entonces tenemos que  $n^{\pi(2n) - \pi(n)} < 2^{2n}$  (pues todos esos primos son mayores que  $n$ ).

Aplicando logaritmos, se deduce que

$$(\pi(2n) - \pi(n)) \log n < 2n \log 2 \quad \implies \quad \pi(2n) - \pi(n) < \frac{2n \log 2}{\log n}.$$

Usando un argumento por inducción, para mostrar que

$$\pi(2^{k+1}) < \frac{5 \cdot 2^k}{k}.$$

- Para  $k \leq 4$  esto se verifica fácil, o se deduce de que  $\pi(2^k) \leq 2^{k-1}$ , para  $k \geq 0$ .
- Para  $k \geq 5$ , se tiene el paso inductivo

$$\pi(2^{k+2}) \leq \pi(2^{k+1}) + \frac{2^{k+1} \log 2}{\log 2^{k+1}} \leq \frac{5 \cdot 2^k}{k} + \frac{2^{k+1}}{k+1} \leq \frac{8 \cdot 2^k}{k+1} + \frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{5 \cdot 2^{k+1}}{k+1},$$

# Teorema de Chebyshev

pues  $\frac{5}{k} \leq \frac{8}{k+1}$ , para todo entero positivo  $k \geq 2$ .

De lo anterior, se sigue que si  $2^k < x \leq 2^{k+1}$ , entonces

$$\pi(x) \leq \frac{5 \cdot 2^k}{k} < \frac{5 \cdot x}{k+1} < \frac{5x \log 2}{\log x} = C \frac{x}{\log x}, \quad \text{con } C = 5 \log 2.$$

(pues  $f(x) = \frac{x \log 2}{\log x}$  es una función creciente para  $x \geq 3$ ).

Mostramos ahora la otra desigualdad. Sea  $\binom{2n}{n} = \prod_{p < 2n} p^{\alpha_p}$  la factoración en primos de  $\binom{2n}{n}$ . Por el lema anterior, tenemos que  $p^{\alpha_p} \leq 2n \iff \alpha_p \log p \leq \log 2n$ . Portanto

$$\log \binom{2n}{n} = \sum_{p < 2n} \alpha_p \log p \leq \sum_{p < 2n} \log 2n = \pi(2n) \log 2n.$$

$$\text{Luego, } \pi(2n) \geq \frac{\log \binom{2n}{n}}{\log 2n}$$

# Funciones Aritméticas

y como

$$\binom{2n}{n} = \underbrace{\frac{2n}{n}}_{\geq 2} \cdot \underbrace{\frac{2n-1}{n-1}}_{\geq 2} \cdots \underbrace{\frac{n+1}{1}}_{\geq 2} \geq 2^n.$$

$$\text{Entonces, } \pi(2n) \geq \frac{\log \binom{2n}{n}}{\log 2n} \geq \frac{n \log 2}{\log 2n}.$$

De ahí que

$$\pi(x) \geq \frac{x \log 2}{2 \log x},$$

para todo  $x$  par, lo que implica la misma ecuación para todo  $x$  entero, pues  $\pi(2k-1) = \pi(2k)$ , para  $k \geq 2$ .  $\square$

# Teorema de Chebyshev

## Corolario

Sea  $p_n$  el  $n$ -ésimo número primo. Existen constantes  $0 < c' < C'$  tales que

$$c' n \log n < p_n < C' n \log n.$$

Prueba: Si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \log n} > C'$ , entonces vale

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(p_n)}{p_n / \log p_n} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\log n + \log n + \log \log n)}{C' n \log n} = \frac{1}{C'}, \end{aligned}$$

ya que  $\frac{x}{\log x}$  es creciente para  $x \geq 3$ . Así, como  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} > 0$ , por el Teorema de Chebyshev tenemos que existe  $C' > 0$  tal que  $p_n < C' n \log n$ , para todo  $n \geq 2$ . De forma similar se prueba la existencia de la constante  $c'$ .  $\square$



# Teorema de Chebyshev

## Corolario

- a) Las funciones  $p_n$  y  $n \log n$  tienen el mismo orden de magnitud, esto es  $p_n \asymp n \log n$ .
- b) Las funciones  $\pi(x)$  y  $\frac{x}{\log x}$  tienen el mismo orden de magnitud, esto es  $\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}$ .

Prueba: (a) Se deduce inmediatamente del corolario previo  $c' n \log n < p_n < C' n \log n$ .

(b) Se deduce inmediatamente del Teorema de Chebyshev  $c \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C \frac{x}{\log x}$ .  $\square$

## Corolario

Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  una función decreciente. La serie

$$\sum_{p \text{ primo}} f(p) \text{ converge} \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{\log n} \text{ converge.}$$

En particular,  $\sum_p \frac{1}{p}$  converge.  $\square$

# Postulado de Bertrand

Sabemos que existen secuencias arbitrariamente grandes de números consecutivos que no contienen primos. Por ejemplo

$$k! + 2, k! + 3, k! + 4, \dots, k! + k.$$

Nuestro próximo resultado afirma que los primos no son tan raros, sino que siguen cierta “densidad”. Este teorema también se debe a CHEBYSHEV.

Comenzamos con un lema:

## Lema

Para todo  $n \geq 2$ , tenemos  $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$ .

Prueba: Por inducción sobre  $n$ .

Es fácil verificar que el resultado vale para  $n = 2, 3$  y  $4$ .

Suponga que el resultado vale para  $n = 2m + 1$ , entonces vale también para  $n = 2m + 2$ , pues no agregamos nuevos primos al producto al pasar de  $2m + 1$  a  $2m + 2$ .

# Postulado de Bertrand

Basta entonces mostrar la desigualdad para un número impar  $2m + 1$ . Para un primo  $p$  tal que  $m + 1 < p \leq 2m + 1$ , se tiene que  $p \mid (2m + 1)!$  pero  $p \nmid m!$  y  $p \nmid (m + 1)!$ , entonces

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m}{m+1} + \binom{2m}{m} < (1+1)^{2m} = 2^{2m} = 4^m.$$

De la hipótesis inductiva, se tiene que

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p < 4^{m+1} 4^m = 4^{2m+1}. \quad \square$$

## Teorema (Postulado de BERTRAND)

Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  un entero positivo. Entonces, siempre existe un número primo  $p$  tal que  $n \leq p \leq 2n$ .

Prueba: Supongamos que el resultado es falso para algún valor de  $n$ . Vamos a mostrar

# Postulado de Bertrand

que  $n$  no puede ser muy grande.

Sea  $p_k$  el  $k$ -ésimo primo y sea  $\alpha_k$  el mayor valor tal que  $p_k^{\alpha_k} \mid \binom{2n}{n}$ . Como estamos suponiendo que no hay primos entre  $n$  y  $2n$ , y como ningún primo entre  $\frac{2}{3}n$  y  $n$  divide a  $\binom{2n}{n}$ , por el lema al inicio del aula tenemos que  $p_k^{\alpha_k} \leq 2n$ , y  $\alpha_j \leq 1$ , para  $p_j > \sqrt{2n}$ . Luego

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p_k \leq \sqrt{2n}} p_k^{\alpha_k} \prod_{\sqrt{2n} < p_j \leq \frac{2n}{3}} p_j \leq \prod_{p_k \leq \sqrt{2n}} 2n \prod_{p_j \leq \frac{2n}{3}} p_j.$$

Ahora, del lema anterior, y suponiendo que  $n$  es suficientemente grande, de modo que el número de primos entre 1 y  $\sqrt{2n}$  es menor que  $\sqrt{n/2} - 1$  ( $n = 100$  es suficiente, pues ya a partir de este número la mitad de los valores en este intervalo son pares), tenemos

$$\binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{n/2}-1} \cdot 4^{2n/3}.$$

# Postulado de Bertrand

Por otro lado,  $n\binom{2n}{n} = n\binom{2n-1}{n} + n\binom{2n-1}{n-1} > (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$ . y así, la desigualdad anterior implica que

$$\frac{2^{2n-1}}{n} < (2n)^{\sqrt{n/2}-1} \cdot 4^{2n/3} \implies 2^{2n/3} < (2n)^{\sqrt{n/2}}.$$

Tomando logaritmo base 2, obtenemos la desigualdad  $\frac{2\sqrt{2}}{3} < \log_2 n + 1$ , que es falsa para todo  $n > 50$ . Así, de existir un contra-ejemplo al postulado de Bertrand, éste debe ser menor a 100. Para concluir el resultado, basta mostrar un primo que cumple las condiciones del teorema para todo  $n < 100$ :

$$p = 2 \text{ para } 1 \leq n \leq 2,$$

$$p = 5 \text{ para } 3 \leq n \leq 5,$$

$$p = 11 \text{ para } 6 \leq n \leq 11,$$

$$p = 23 \text{ para } 12 \leq n \leq 23,$$

$$p = 47 \text{ para } 24 \leq n \leq 47,$$

$$p = 79 \text{ para } 48 \leq n \leq 79,$$

$$p = 101 \text{ para } 80 \leq n \leq 100. \quad \square$$