

PROMEDIOS DE FUNCIONES ARITMÉTICAS

ALAN REYES-FIGUEROA
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 36) 08.NOVIEMBRE.2024

Otras Funciones Aritméticas

Vimos funciones aritméticas como $\mu(n)$, $\varphi(n)$, $\Lambda(n)$.
Existen muchas otras.

$$\sigma_{\alpha}(n) = \sum_{d|n} d^{\alpha} = x^{\alpha} * \mathbf{1}, \quad \alpha \geq 0.$$

Ejemplos:

$$d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 = \text{número de divisores positivos de } n.$$

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d = \text{suma de los divisores positivos de } n.$$

La función de LIOUVILLE:

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r}, \text{ siempre que } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Funciones Aritméticas

Considere la función $d(n)$, el número de divisores de n .

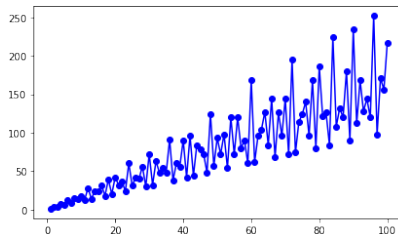
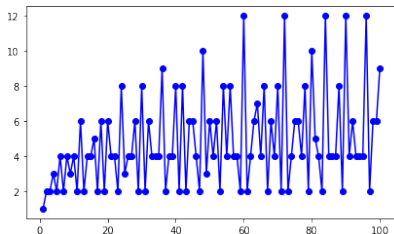
Esta función toma en el valor 2 infinitamente (cuando n es primo) y también toma arbitrariamente valores grandes cuando n tiene un gran número de divisores. De hecho, los valores $d(n)$ fluctúan considerablemente a medida que n aumenta.

Muchas funciones aritméticas fluctúan de esta manera y a menudo es difícil determinar su comportamiento para n grande. A veces es más fructífero estudiar la media aritmética

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k).$$

Promedios de Funciones Aritméticas

La mayoría de funciones aritméticas fluctúan.

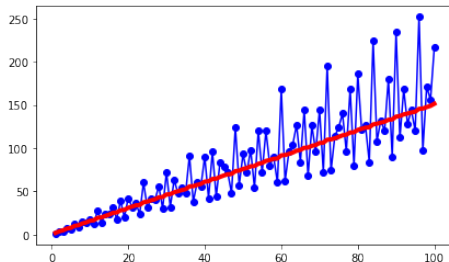
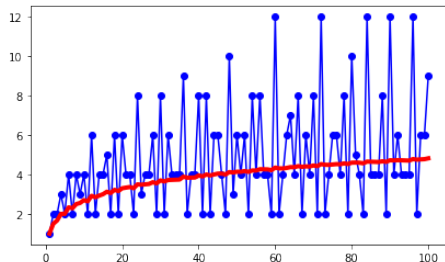


(a) La función $d(n)$; (b) La función $\sigma(n)$.

Muchas veces es mas útil estudiar la media de f :
$$\tilde{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k),$$
 y ver cómo esta media crece asintóticamente.

Promedios de Funciones Aritméticas

Por ejemplo,



(a) La función $d(n)$; (b) La función $\sigma(n)$; junto con sus promedios.

Pareciera que para la función del número de divisores $d(n)$, el promedio $\tilde{d}(n)$ crece parecido al logaritmo. Por otro lado, para la función suma de divisores $\sigma(n)$, el promedio $\tilde{\sigma}(n)$ crece similar a una función lineal.

Promedios de Funciones Aritméticas

De hecho, es posible mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{\log n} = 1.$$

(o sea que ambas tiene un comportamiento asintótico equivalente).

Para conocer el comportamiento de la media $\tilde{f}$, precisamos conocer cómo se comportan las sumas parciales $\sum_{k=1}^n f(k)$.

Frecuentemente es más conveniente reemplazar la variable discreta n , por una variable continua $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\sum_{k \leq x} f(k).$$

Notación Asintótica

Sean $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición

Si $g(x) > 0$ para $x \geq a$, decimos que **f es O grande respecto de g** , denotado $f(x) = O(g(x))$, si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Mg(x), \quad \forall x \geq a.$$

Una ecuación de la forma $f(x) = h(x) + O(g(x))$, significa que

$$f(x) - h(x) = O(g(x)).$$

Recordar las otras notaciones: *little o*, *big Ω* , *big Θ* .

Notación Asintótica

En teoría de números, es común utilizar la **notación de Vinogradov**:

$$f(x) \ll g(x), \quad \text{si } f(x) = O(g(x)); \quad (1)$$

$$f(x) \gg g(x), \quad \text{si } g(x) = O(f(x)); \quad (2)$$

$$f(x) \asymp g(x), \quad \text{si } f(x) \ll g(x) \text{ y } g(x) \ll f(x); \quad (3)$$

$$f(x) \sim g(x), \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (4)$$

Funciones Aritméticas

Propiedad

Si $f(t) = O(g(t))$, para $t \geq a$, entonces $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$, $x \geq a$.

Prueba: Como $f(t) = O(g(t))$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Mg(t)$, $\forall t \geq a$.
Luego

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^x Mg(t) dt = M \int_a^x g(t) dt$$

para todo $x \geq a$, y se verifica el resultado. $\square$

Teorema (Fórmula de Sumas de Euler)

Si f tiene derivada continua en el intervalo (y, x) , $0 < y < x$, entonces

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t) dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y).$$

Prueba: Sean $m = \lfloor y \rfloor$, $k = \lfloor x \rfloor$. Para enteros $n, n-1 \in (y, x]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t) dt &= \int_{n-1}^n (n-1) f'(t) dt = (n-1) (f(n) - f(n-1)) \\ &= nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n). \end{aligned}$$

Sumando lo anterior desde $n = m+2$ hasta k , obtenemos

$$\int_{m+1}^k \lfloor t \rfloor f'(t) dt = kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{n=m+2}^k f(n) = kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{y < n \leq x} f(n).$$

Funciones Aritméticas

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{y < n \leq x} &= - \int_{m+1}^k \lfloor t \rfloor f'(t) dt + kf(x) - mf(m+1) \\ &= - \int_y^k \lfloor t \rfloor f'(t) dt + kf(x) - mf(m+1) + \\ &= - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t) dt + kf(x) - mf(m+1) + \int_y^{m+1} \lfloor t \rfloor f'(t) dt \\ &= - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t) dt + kf(x) - mf(y) \\ &= - \int_y^x t f'(t) dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t) dt + kf(x) - mf(y).\end{aligned}$$

Funciones Aritméticas

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\sum_{y < n \leq x} &= \int_y^x f(t) dt - xf(x) + yf(y) + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t) dt + kf(x) - mf(y) \\ &= \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t) dt + (y - \lfloor y \rfloor) f(y) - (x - \lfloor x \rfloor) f(x).\end{aligned}$$

Funciones Aritméticas

Definimos la **función zeta de Riemann** como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ para } s > 1.$$

En el intervalo $0 < s < 1$, usamos la notación $\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right)$.

Teorema Para $x \geq 1$, valen

$$\text{a) } \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{c) } \sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s}), s > 1.$$

$$\text{b) } \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}), s > 0, s \neq 1 \quad \text{d) } \sum_{n \leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha), \alpha \geq 0.$$

C es la constante de Euler-Mascheroni, $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \approx 0.57721\dots$

Funciones Aritméticas

Teorema (Fórmula Asintótica de Dirichlet)

Para todo $x \geq 1$, tenemos

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

donde C es la constante de Euler-Mascheroni,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \approx 0.57721\dots$$

Teorema

Para $x \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{2} \zeta(2) x^2 + O(x \log x).$$