Fracciones Continuas

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números

(Aula 25) 04.octubre.2024

Fracciones Continuas

En las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, probablemente el paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ es el más complicado conceptualmente.

- el concepto de número natural es casi un concepto primitivo,
- un número entero no es más que una clase de naturales, con signo,
- un racional, es una clase que viene del cociente entre dos enteros a y $b \neq 0$,
- un número real es una clase de secuencias de Cauchy de racionales.

(Ver *Introducción a la Matemática Moderna*, Suger-Morales-Pinot).

Una propiedad de $\mathbb{R}$ es que todo número real puede ser aproximado por racionales. De hecho, si $x \in \mathbb{R}$, basta hacer $q = \lfloor x \rfloor$ y tenemos $0 \leq x - q < 1$.

Si escribimos la representación decimal de $x - q$ como $x = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ entonces si $r_n = a_n + 10a_{n-1} + 100a_{n-2} + \ldots + 10^{n-1}a_1$, vale

$$\frac{r_n}{10^n} \leq x - q < \frac{r_n+1}{10^n},$$

y portanto $q + \frac{r_n}{10^n}$ es una buena aproximación racional para x, en el sentido que el error $|x - (q + \frac{r_n}{10^n})|$ es menor que $\frac{1}{10^n}$.

Fracciones Continuas

Así, la representación decimal de x produce una secuencia $\{q_k\}_k \subset \mathbb{Q}$ de racionales que aproximan a x y cuyos denominadores son potencias de 10.

Ahora, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier natural $q \neq 0$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$.

<u>Prueba</u>: Basta tomar $p = \lfloor qx \rfloor$. Luego

$$0 \leq qx - p < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}. \ \square$$

En consecuencia

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q} \qquad \text{y} \qquad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| \leq \frac{1}{q}.$$

Ejemplo: $x = \pi$, $q = 10$.
Entonces $p = \lfloor 10\pi \rfloor = \lfloor 31.415926535\ldots \rfloor = 31$. De ahí que $\frac{p}{q} = \frac{31}{10}$

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = 0.0415926535\ldots < \frac{1}{10} \qquad \text{y} \qquad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| = 0.0584073346\ldots \leq \frac{1}{10}.$$

Hay aproximaciones racionales de x con denominador q, cuyo error es menor que $\frac{1}{q}$. En particular, las que provienen de la representación decimal, corresponden a denominadores potencias de 10.

Las aproximaciones base 10 son útiles y populares para efectuar cálculos (métodos numéricos, teoría de aproximación), pero esconden aproximaciones racionales de x mucho más eficientes. Por ejemplo

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \qquad \text{y} \qquad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|.$$

Estas revelan que $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$ son aproximaciones mucho más eficiente se $x = \pi$, que otras con denominadores muycho mayores.

El objetivo de las próximas aulas es presentar una otra forma de representar números reales, proveniente de **fracciones continuas**. Esta representación produce aproximaciones racionales muy eficientes.

Fracciones Continuas

Sea $x \in \mathbb{R}$. Denotamos de forma recursiva

$$\alpha_0 = x, \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad \text{y si } \alpha_n \notin \mathbb{Z},\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_n = a_n$ (esto es $\alpha_n \in \mathbb{Z}$), entonces escribimos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{1}$$

Denotamos la representación en (1) por $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Si no, denotamos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \tag{2}$$

y escribimos $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Fracciones Continuas

Ejemplo 1: Tomemos $x = \sqrt{11} \approx 3.3166247903554\ldots$

Entonces $a_0 = \lfloor x \rfloor = 3$, y

$$
\begin{aligned}
\sqrt{11} &= 3.3166247903\ldots = 3 + 0.3166247903\ldots = 3 + \cfrac{1}{3.158312395\ldots} \\
&= 3 + \cfrac{1}{3 + 0.158312395\ldots} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6.3166247903\ldots}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + 0.3166247903\ldots}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3.158312395\ldots}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + 0.158312395\ldots}}}
\end{aligned}
$$

Luego, $\sqrt{11} = [3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \ldots]$

Ejemplo: Tomemos $x = \pi \approx 3.1415926535\ldots$

Entonces $a_0 = \lfloor x \rfloor = 3$, y

$$\begin{aligned}
\pi &= 3.1415926535\ldots = 3 + 0.1415926535\ldots = 3 + \cfrac{1}{7.062513306\ldots} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + 0.062513306\ldots} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15.996594407\ldots}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0.996594407\ldots}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1.003417231\ldots}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0.003417231\ldots}}}
\end{aligned}$$

Luego, $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]$

Fracciones Continuas

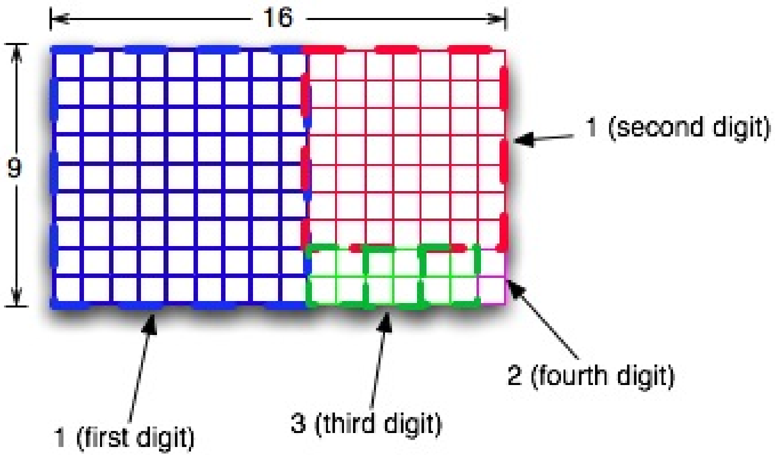
En este caso, podemos construir aproximaciones de π como: $[3;] = 3$; $[3;7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.14285614\ldots\ldots$; $[3;7,15] = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} = 3.14150943\ldots\ldots$

Ejemplo: Tomemos $x = \frac{16}{9} = 1.77777777\ldots$

Entonces $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$, y

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + \frac{1}{9/7} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{7}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7/2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

De ahí que $\frac{16}{9} = [1;1,3,2]$



Interpretación geométrica de una fracción continua.

Obs:

- En el caso que $x \notin \mathbb{Q}$, la fracción continua de x es infinita.
- Cuando $x \in \mathbb{Q}$, su representación en fracción continua es finita, y los coeficientes vienen del algoritmo de Euclides.

En el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} 16 &= 1(9) + 7, \\ 9 &= 1(7) + 2, \\ 7 &= 3(2) + 1, \\ 2 &= 2(1) + 0. \end{aligned}$$

En general, si

$$\begin{aligned}
p &= a_0 q + r_1,\\
q &= a_1 r_1 + r_2,\\
r_1 &= a_2 r_2 + r_3,\\
&\dots\\
r_{n-1} &= a_n r_n + 0.
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
x &= \frac{p}{q} \dots = a_0 + \frac{r_1}{q} \dots = a_0 + \frac{1}{q/r_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_1/r_2}}\\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \dots = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].
\end{aligned}$$

Si $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, la fracción $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ se llama la n**-ésima reducida** o n**-ésima convergente** de la fracción continua de x.

Proposición

Dada una secuencia (finita o infinita) $t_0, t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}$, tal que $t_k > 0$ para todo $k \geq 1$, definimos secuencias $\{x_m\}$ y $\{y_m\}$ por

$$\begin{aligned} x_0 = t_0,\ y_0 = 1,\ x_1 = t_0 t_1 + 1,\ y_1 = t_1, &\qquad y, \\ x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m,\ y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m, &\qquad \forall m \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \ddots + 1/t_n}} = \frac{x_n}{y_n},\ \forall n \geq 0.$$

Además, $x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

Prueba: Por inducción sobre n. Para $n=0$, tenemos $[t_0]=t_0=\frac{t_0}{1}=\frac{x_0}{y_0}$. Para $n=1$, tenemos $[t_0;t_1]=t_0+\frac{1}{t_1}=\frac{t_0t_1+1}{t_1}=\frac{x_1}{y_1}$, y para $n=2$ resulta

$$\begin{aligned}[t_0;t_1,t_2] &= t_0+\frac{1}{t_1+1/t_2} = t_0+\frac{t_2}{t_1t_2+1} = \frac{t_0t_1t_2+t_0+t_2}{t_1t_2+1} \\ &= \frac{t_2(t_0t_1+1)+t_0}{t_2t_1+1} = \frac{t_2x_1+x_0}{t_2y_1+y_0} = \frac{x_2}{y_2}.\end{aligned}$$

Suponga que la afirmación es válida para n. Entonces

$$\begin{aligned}[t_0;t_1,t_2,\ldots,t_n,t_{n+1}] &= \left[t_0;t_1,t_2,\ldots,t_n+\frac{1}{t_{n+1}}\right] = \frac{(t_n+\frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1}+x_{n-2}}{(t_n+\frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1}+y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1}(t_nx_{n-1}+x_{n-2})+x_{n-1}}{t_{n+1}(t_ny_{n-1}+y_{n-2})+y_{n-1}} \\ &= \frac{t_{n+1}x_n+x_{n-1}}{t_{n+1}y_n+y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Mostramos ahora la segunda afiramción, también por inducción.
Para $n = 0$, tenemos que $x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1)(1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0$. Si $x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, entonces

$$\begin{aligned} x_{n+2} y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+2} &= (t_{n+2} x_{n+1} + x_n) y_{n+1} - x_{n+1}(t_{n+2} y_{n+1} + y_n) \\ &= t_{n+2} x_{n+1} y_{n+1} + x_n y_{n+1} - t_{n+2} x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+1} y_n \\ &= -(x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}) \ = \ -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

En los siguientes resultados $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ será un número real y $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ la secuencia de convergentes de su fracción continua.

Corolario

Las secuencias $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ satisfacen las recurrencias

$$p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n, \qquad q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n, \forall n \geq 0,$$

con $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$ y $q_1 = a_1$. Además, $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \qquad y \qquad \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}.$$

Prueba: La primera igualdad sigue de la proposición anterior, pues

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

La segunda igualdad es consecuencia de la primera:

$$\begin{aligned} x(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}) = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_n(xq_{n-1} - p_{n-1}) = p_{n-2} - xq_{n-2} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición

Vale

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, q_n^2},$$

donde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$. *En particular*

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)\, q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}\, q_n^2}.$$

Prueba: Por el corolario anterior, tenemos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{-(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + q_{n-1}/q_n)q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n}. \end{aligned}$$

En particular,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, q_n^2}.$$

Como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ y $0 < \beta_{n+1} < 1$, se sigue que $a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ y

$$a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2,$$

lo que muestra

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)\, q_n^2} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}\, q_n^2}.$$

Finalmente, la expresión de β_{n+1} como fracción continua se sigue de

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}},$$

y se tiene la representación en sentido reverso. $\square$