UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Más sobre el Algoritmo de Euclides

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números

(Aula 05) 19.julio.2024

Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides puede escribirse en forma matricial. Observe que

$$a = q_1 b + r_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r_1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{M} \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Algoritmo de Euclides

Si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, y como $\det \mathbf{M} = (-1)^n$, entonces $\mathbf{M}^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$, y tenemos

$$\begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En particular $(a, b) = r_n = (-1)^n (m_{22}a - m_{12}b)$, da los coeficientes en el Teorema de Bézout.

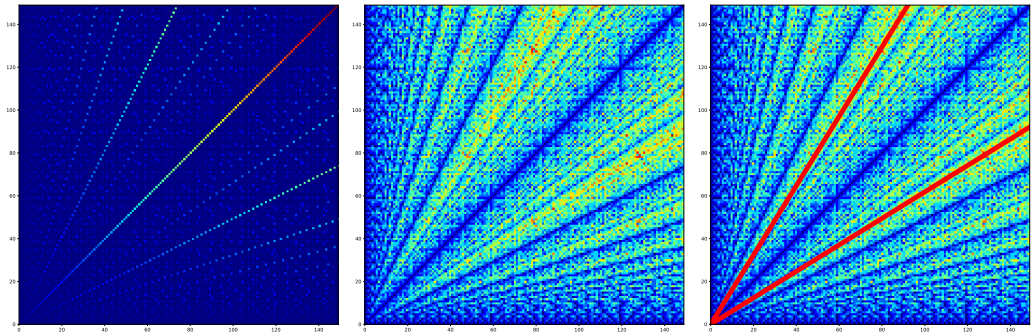
Algoritmo de Euclides

La eficiencia computacional del algoritmo de Euclides se ha estudiado a fondo.

- A. A. L. Reynaud (1811), demostró que el número de pasos de división en la entrada (a, b) está acotado por b.
- Más tarde mejoró esto a $\frac{b}{2} + 2$.
- P. J. E. Finck (1841), mostró que el número de pasos de división es como máximo $2 \log_2 b + 1$.
- Émile Léger (1837), estudió el peor caso.
- Gabriel Lamé (1844), refina el análisis de Finck. Mostró que el número de pasos requeridos nunca es más de cinco veces el número h de dígitos en base 10 del número menor b.

Obs! El peor caso corresponde a cuando todo cociente $q_i = 1$ en el sistema (**??**).
Esto ocurre exactamente al tomar dos números de Fibonacci consecutivos.

Algoritmo de Euclides



Comparación de valores en el algoritmo de Euclides. (a) $d = (a, b)$. (b) Número requerido de pasos. (c) Observe las diagonales que requieren más pasos coinciden con números a y b con una relación cercana al valor $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *e.g.* números de Fibonacci consecutivos.

Estimativa de Lamé

Sean $a \geq b \geq 0$. Recordemos que si el Algoritmo de Euclides hace $k+1$ divisiones para hallar $d = (a, b)$, entonces en cada paso $r_{k+1} = q_k r_{k-1} + r_k$, $q_k \geq 1$, $b > r \geq 0$, se tiene

$$a = qb + r \geq b + r > 2r, \;\Rightarrow\; r < \tfrac{a}{2}.$$

Similarmente, $r_1 < \frac{b}{2} \leq \frac{a}{2}$, $r_2 < \frac{r}{2} < \frac{a}{4}$, $r_3 < \frac{r_1}{2} < \frac{b}{4} \leq \frac{a}{4}$, ..., y en general

$$r_{2j} < \tfrac{a}{2^j}, \qquad r_{2j+1} < \tfrac{a}{2^j} \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, (k+1)/2.$$

Por otro lado, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a < 2^t \;\Rightarrow\; \log_2 a < t \;\Rightarrow\; r_{2t} < \frac{a}{2^t} < 1 \;\Rightarrow r_{2t} = 0$. (*i.e.*, el algoritmo acaba a lo sumo en $2t$ pasos)

Si a tiene N dígitos en su representación decimal, entonces $a < 10^N$. Luego, $\log_2 a < N \log_2 10$.

Estimativa de Lamé

Así

$$k+1 = 2t \leq 2\big(\lfloor \log_2 a \rfloor + 1\big) \leq 2\big(N\lfloor \log_2 10 \rfloor + 1\big) \approx 6.6N.$$

(Lamé, 1844).

Se puede mostrar que para que el Algoritmo de Euclides efectúe n pasos ($n = k+1$), se debe tomar al menos $a = F_{n+2},\ b = F_{n+1}$.
En particular $n < 2\log_2 a \ \Rightarrow \frac{n}{2} < \log_2 a \ \Rightarrow\ a > 2^{n/2}$.

Recordemos la **Fórmula de** Binet (1843)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Como $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$, cuando $n \to \infty$, podemos simplificar

Estimativa de Lamé

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n,$$

donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón aúrea. (*i.e.*, los F_n se parecen a los φ^n)

Recordemos que φ satisface $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, de modo que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Afirmamos que $F_n \geq \varphi^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

$F_1 = 1 \geq \varphi^0$, $F_2 = 2 \geq \varphi$. Asumiendo la hipótesis inductiva que $F_k \geq \varphi^{k-1}$ siempre que $k \leq n$, entonces $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = \varphi^{n-2}(\varphi + 1) = \varphi^{n-2}\varphi^2 = \varphi^n$, lo que completa la afirmación.

Luego, $a = F_{n+2} \geq \varphi^{n+1}$ y vale que $n \leq n + 1 = \log_\varphi \varphi^{n+1} \leq \log_\varphi a$.

Estimativa de Lamé

De esta última desigualdad, obtenemos

$$n \leq \log_{\varphi} a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} \varphi} \approx 4.7851..(\log_{10} a) < 5 \log_{10} a \leq 5N.$$

(Teorema de Lamé, 1844).