Función Zeta de Riemann

Pablo Stefan Quintana

Universidad del Valle de Guatemala
Teoría de Números

16 de noviembre del 2023

Series recíprocas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

En general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \dots$$

- Si $r \in \mathbb{R}$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge si y solo si $r > 1$
- Si $r = 1$ la serie diverge hacia infinito
- Si $r < 1$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, por lo tanto, también diverge

Extensión analítica y ecuación funcional

Extensión analítica

Si se tiene un subconjunto abierto U del plano complejo, que sea dominio de una función f. Entonces, si existe un subconjunto abierto V del plano tal que: $U \subseteq V$, y se tiene una función F tal que $F = f$ en U, entonces F es una extensión analitica de f

Ecuación funcional

Es una ecuación que se expresa con variables independientes y funciones incógnitas cuya expresión se busca.

Definición de ζ

Con $s \in \mathbb{C}$

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

con $Re(s) \geq 1$

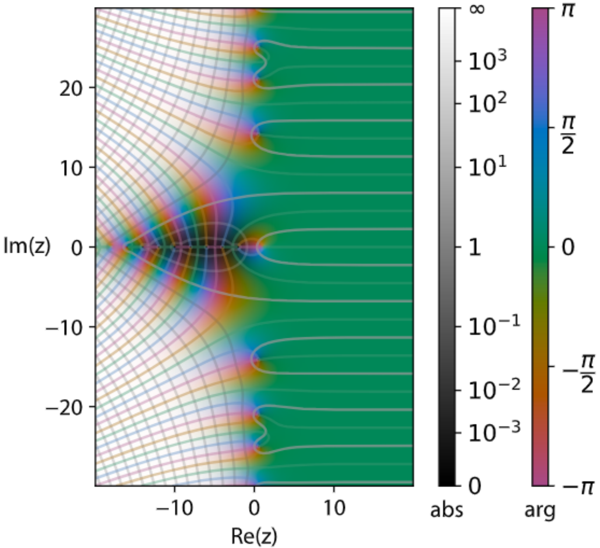
$$\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

Con $0 < Re(s) < 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sen(\frac{\pi s}{2}) \gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Con $Re(s) < 0$, esta es la ecuación funcional de Riemann

Visualización de la función ζ



Ceros triviales

- Cuando $Re(s) > 1$ Se sabe que:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

  es mayor a 1, por lo tanto, no existen ceros cuando $Re(s) > 1$
- Cuando $Re(s) < 0$ Se tiene que:
  - $2^s \neq 0 \pi^{s-1} \neq 0$
- $\gamma(1-s) \neq 0 \zeta(1-s) \neq 0$
  Entonces $sen(\frac{\pi s}{2}) = 0$ Por lo tanto: $Re(s) = -2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$

Hipótesis de Riemann

- Se tiene que si:

$$\zeta(s) = 0$$

con $0 < Re(s) < 1$
Entonces: $Re(s) = \frac{1}{2}$

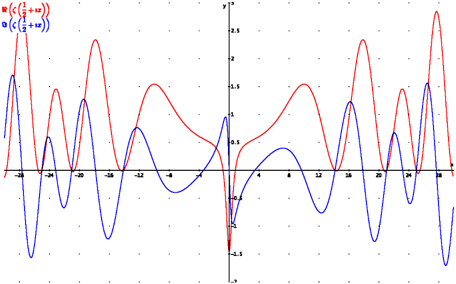


Figura 2: Función con parte real 1/2

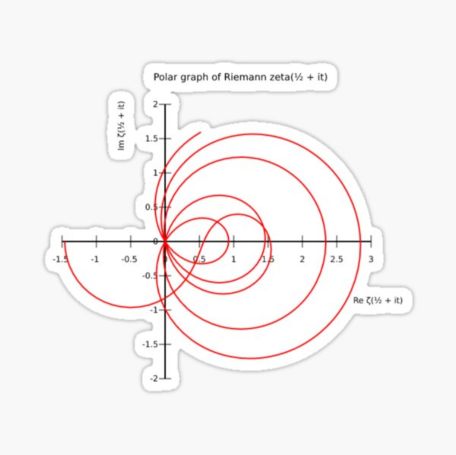


Figura 3: Función con parte real 1/2 coord polares

Función $\pi(x)$ y aproximaciones

$$\text{Sea } \pi(x) = \{p : p \in P, p \leq x\}$$

- $\frac{x}{ln(x)}$
- $li(x) = \int_0^x \frac{dt}{ln(t)}$

Se tiene que:

- $lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{ln(x)}} = 1$
- $lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{li(x)} = 1$

Hipótesis de Riemann y números primos

Considérese la función de Riemann:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{\frac{1}{n}})$$

Se tiene que:

$$R(x) = li(x) - ln(2) - \sum_{\rho} li(x^{\rho})$$

donde ρ recorre los ceros no triviales de la función ζ

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} R(x^{\frac{1}{n}})$$

Aproximación de $\pi(x)$ con $R(c)$

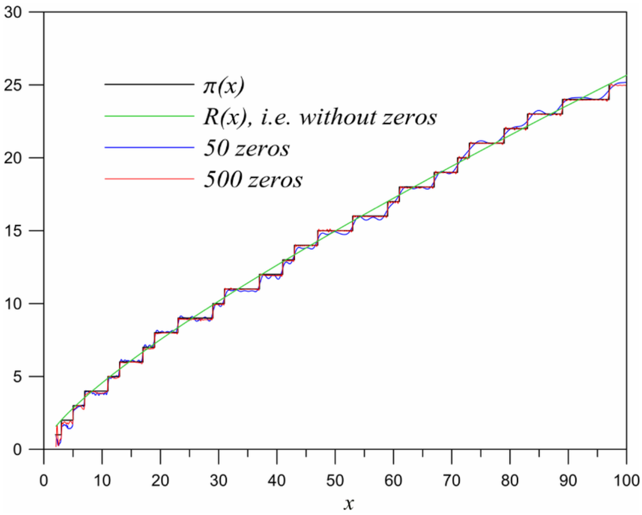


Figura 4: Comparación

Consecuencias

- Distribución de números primos
- Distancia entre números primos
- Ratio de crecimiento de la función ζ en la recta crítica
- Criterio de Riesz

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(k-1)!\zeta(2k)} = O(x^{\frac{1}{4}+\epsilon})$$

Avances o Intentos de demostración

- Hilbert y Polya: operadores autoadjuntos
- Teorema Lee-Yang: Este dicta que los ceros de la función de partición caen en una recta crítica de su parte real
- Resultado de Turan: Si se cumple lo siguiente:

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(x)}{n} \geq 0, \forall x > 0$$

  Se cumple la hipótesis
- Espacios de Hilbert de funciones completas: Se encontraron condiciones que seguiría la hipótesis en ciertos espacios de Hilbert de funciones completas.

Argumentos

A favor

- Existen pruebas de la hipótesis de Riemann en campos finitos, realizadas por Deligne
- Se ha probado cierta la conjetura de Goldbach para primos suficientemente grandes a través de asumir cierta la hpótesis de Riemann y luego se ha probado independiente a la hipótesis, es decir que varias de sus predicciones son ciertas.

En contra

- A pesar que los ceros encontrados están sobre la recta crítica, la teoría de números analítica ha presentado resultados similares en conjeturas que han resultado ser falsas.

Referencias

- (Uriarte, 2018) La Función Zeta de Riemann y su relación con la distribución de los números primos; Carlos Uriarte Baranda, Universidad de País Vasco
- (Durá) La Función Zeta de Riemann y su relación con los números primos; Luis Carlés Durá, Universidad Politécnida de Madrid
- Wikipedia contributors. (2023, 7 noviembre). Riemann Hypothesis. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Riemannhypothesis