La conjetura Monstruous Moonshine

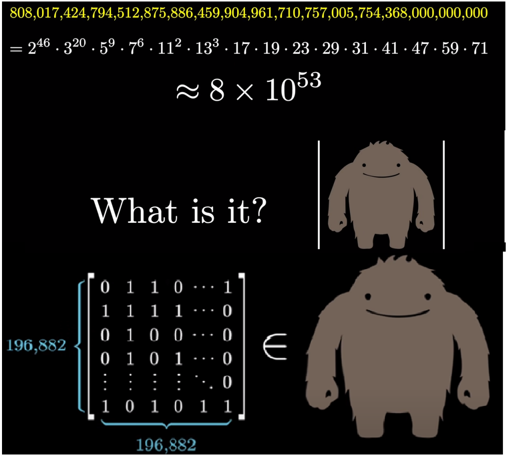
Seminario 1 de Teoria de Numeros

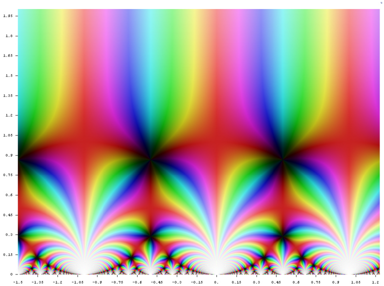
Alejandro Pallais Garcia

Universidad del Valle de Guatemala

26 de noviembre de 2023

Introduccion





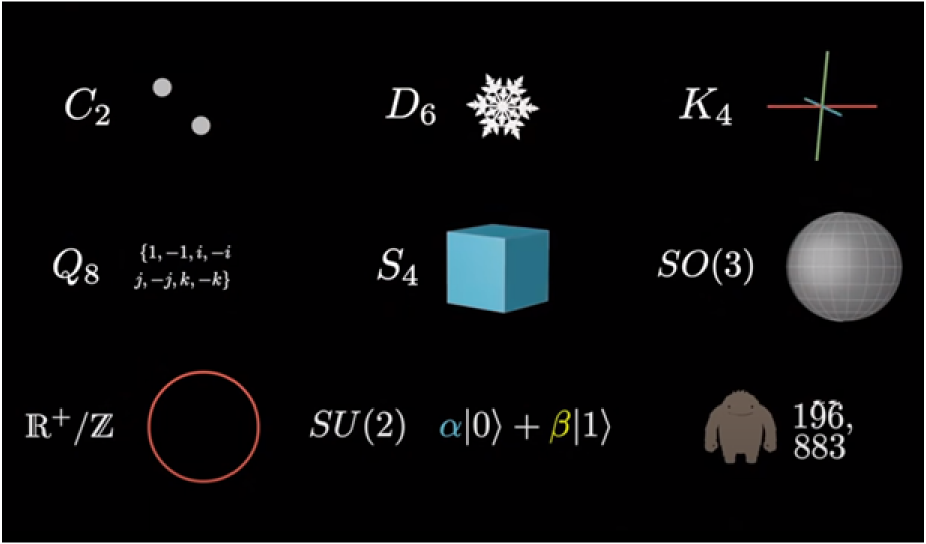
$$j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{(2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau)} = \left(12\frac{g_2(\tau)}{(2\pi)^4\eta^8(\tau)}\right)^3$$

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196,844q^{-1} + 21,493,760q^{-2} + \cdots$$

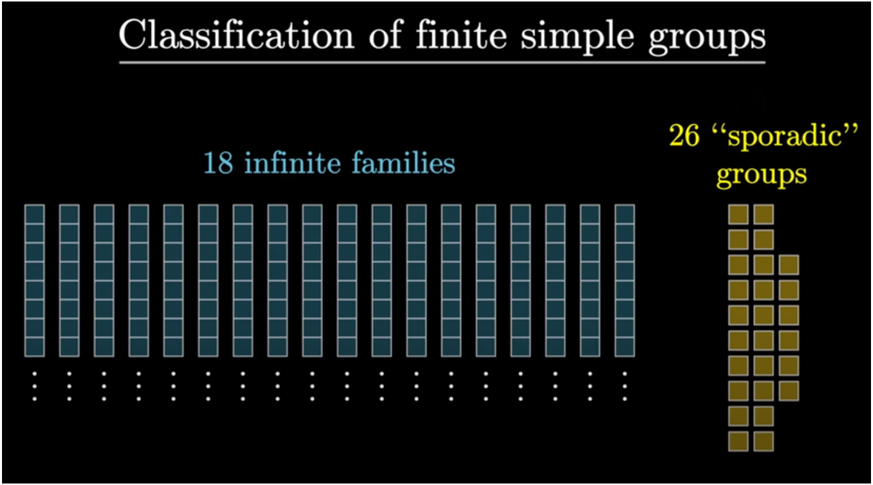
Contenido

Contenido

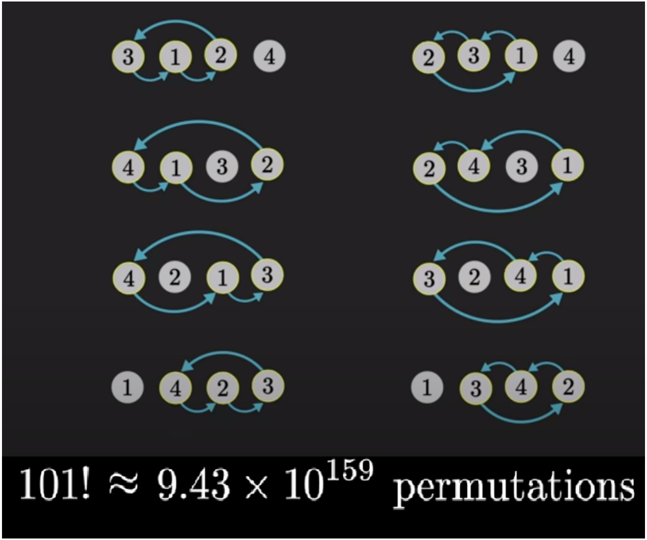
tipos de grupos



clasificacion de grupos simples finitos



grande≠especial



Representacion Irreducible de un grupo

Representacion de un grupo:
una representacion (ρ, V) de un grupo G en un espacio vectorial V es un homomorfismo tal que

$$\rho : G \to GL(V)$$

donde GL(V) es el grupo de transformaciones lineales invertibles de V
representacion reducible:
Una representacion ρ de un grupo G sobre un espacio vectorial V es reducible si existe un subespacio no trivial $W \subseteq V \ni$

$$\rho : G \to GL(W)$$

es una representacion ρ de G sobre W
representacion irreducible:
una representaicon es irreducible si no es reducible
dimencion de una representacion: dim(V)

Lemma de Schur's

Enunciado
Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representacion irreducible del grupo G sobre el espacio vectorial V que esta sobre el campo F
Si $T \in GL(V) \Rightarrow \exists k \in F \ni T = kI_V$ donde I_V es la identidad de GL(V)
esquema de demostracion
$kern(T), im(T) \subseteq V$, $\rho : G \to GL(kern(T))$ es una representacion de G, como ρ es irreducible, kern(T) es un subespacio trival, analogamente im(T) tambien y por propiedades de transformadas lineles, T tiene que ser un producto escalar con la identidad
Consecuencias del lema ya que las representaciones ireducibes se ven definicidas por es espacio y todas las transformaciones son productos escalares de la identidad (la cual lo unico que varia es la dimension), las representaciones irreducibles se ven determinadas, salvo isomorfismo, por la dimencion del espacio

dimenciones de representaciones irreducibles del mounstro

The OEIS is supported by the many generous donors to the OEIS Foundation.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Search Hints

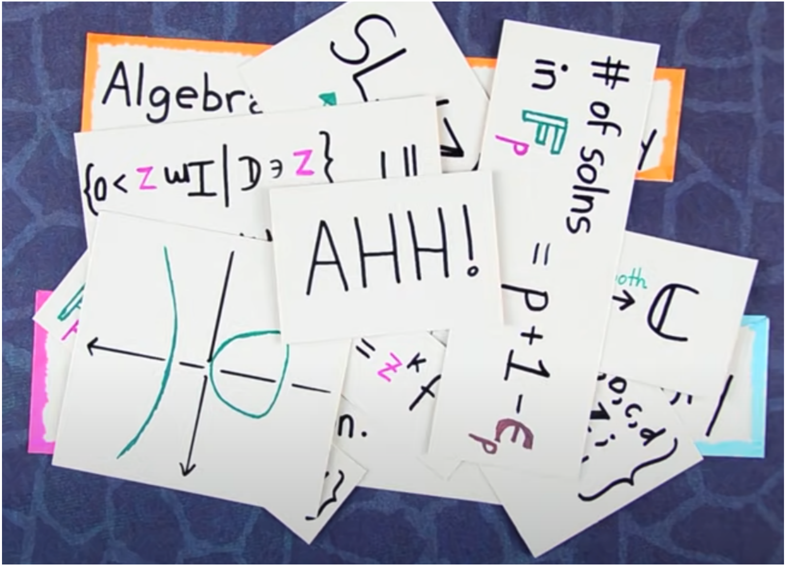
(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A001379 Degrees of irreducible representations of Monster group M. 10

1, 196883, 21296876, 842609326, 18538750076, 19360062527, 293553734298, 3879214937598, 36173193327999, 125510727015275, 190292345709543, 222879856734249, 1044868466775133, 1109944460516150, 2374124840062976, 8980616927734375, 8980616927734375, 15178147608537368 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Contenido

help



Funcion Modular

$$f : \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\} \to \mathbb{C} \ni$$

$$\exists a \ni \lim_{Im(z)\to\infty} f(z) < a$$

$$f(\gamma(z)) = (cz + d)^k f(z), \forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, det = 1\}$$

k es el peso

Quien es la funcion j

$$j(z) = 12^3 \frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)} = 12^3 \frac{g_2^3(z)}{g_2^3(z) - 27g_3^2(z)}$$

$$g_2(z) = \frac{4}{3}\pi^4 + 320\pi^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n}$$

$$g_3(z) = \frac{8}{27}\pi^6 + \frac{448}{3}\pi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1 - q^n}$$

$$q = e^{2\pi i z}$$

importancia

- funciones modulares
- lattices en el plano complejo
- Clasificacion de curvas elipticas
- teoria de cuerdas
- $j\left(\frac{1+\sqrt{163}i}{2}\right) = -640320^3 \Rightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(163 \cdot 3344418k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$

Expancion de Fourier $j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)q^n$

Demostración.

Sea f(q)=j(z)

$$f'(q) = \frac{d}{dq}j(z) = \frac{d}{dz}j(z)\frac{dz}{dq} = \frac{j'(z)}{dq/dz} = \frac{j'(z)}{\frac{d}{dz}e^{2\pi iz}} = \frac{j'(z)}{2\pi i e^{2\pi iz}}$$

como j es analitica $\Rightarrow \exists f'(q) \forall q \Rightarrow$ f tiene expancion de Laurent en grado 0

$$j(z) = f(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)q^n$$

$\square$

coeficientes enteros $12^3 j(z) = q^{-1} + 744 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)q^n, c(n) \in \mathbb{Z}$

Demostración.

$$g_2^3(z) = \frac{4^3}{3^3}\pi^{12}\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^{n-1}}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3}\pi^{12}(1+240q+S)^3 =$$

$$= \frac{4^3\pi^{12}}{27}(1+720q+S)$$

$27g_3^2 = \frac{4^3\pi^3}{3^3}(1-1008q+24(12^3)q^2+S) \Rightarrow$

$$j(z) = \frac{12^3(1+720q+S)}{1+720q+S-1-1008q+24(12^3)q^2+S} = \frac{1+720q+S}{q(1-24q+S)} =$$

$$= \frac{1+744q+S}{q} = q^{-1}+744+S$$

coeficientes

The OEIS is supported by the many generous donors to the OEIS Foundation.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A000521 Coefficients of modular function j as power series in q = e^(2 Pi i t). Another name is the elliptic modular invariant J(tau). 334
(Formerly M5477 N2372)

1, 744, 196884, 21493760, 864299970, 20245856256, 333202640600, 4252023300096, 44656994071935, 401490886656000, 3176440229784420, 22567393309593600, 146211911499519294, 874313719685775360, 4872010111798142520, 25497827389410525184, 126142916465781843075 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

relacion

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											
2		M	1	196883	21296876	842609326	18538750076	19360062527	2.93554E+11	sum	J
3			1							1	1
4			1	1						196884	196884
5			1	1	1					21493760	21493760
6			2	2	1	1				864299970	864299970
7			3	3	1	2	1			20245856256	20245856256
8			5	5	2	3	2		1	3.33203E+11	3.33203E+11
9											

Contenido

enunciado

Existe una representacion $(\rho, V^\natural = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i^\natural)$ sobre el mounstro tal que $dim(V_i^\natural) \in \mathbb{Z}^+$ y

$$j(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} dim(V_i^\natural) q^i$$

Contenido

generalicacion/casos especificos

- generalisacion: Larissa Queen in 1980
- primos del mounstro y Brauer characters
- ...

para que?

- impacto en teoria de campos y cuerdas
- coneccion entre grupos finitos simples y funciones modulares
- puentes entre estructuras algebraicas y aparatos modulares
- poco entendimiento

Contenido

Referencias

- Catherine E. Riley (2002), An Overview of Monstrous Moonshine, Channels: Where Disciplines Meet: Vol. 6: No. 2, Article 2. Available at: https://digitalcommons.cedarville.edu/channels/vol6/iss2/2
- Author19901, Alan G. Reyes (2010), A monster tale: a review on Borcherds' proof of monstrous moonshine conjecture, Tesis de Maestría. del Departamento de matematicas del IMPA.
- Wikipedia contributors,Monstrous moonshine, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine.
- Wikipedia contributors, j-invariant, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/wiki/J-invariant
- 3 Blue 1 Brown, Porqué amo el número 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000, Youtube, https://www.youtube.com/watch?v=mH0oCDa74tE