Probelmas de Landau

Historia y Situación Actual

Guillermo Alfonso Furlán Estrada

Universidad del Valle de Guatemala
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Noviembre de 2023

Contenido

Contenido

Fundadores

Figura: Gregor Cantor

Figura: Felix Klein

Los congresos

1. 1900: Se presentaron los Problemas de Hilbert en Paris.
2. 1904: Gyula Konig presenta que la hipotesis de continuo de Cantor es falsa. Pero su prueba estaba equivocada. El error fue descubierto por Zermelo
3. 1912: Edmund Landau presento 4 problemas sobre numeros primos.

Congreso 1912

THE FIFTH INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS.

THE International Congress of Mathematicians, which meets in Cambridge on August 22, is the fifth of a series inaugurated at Zürich in 1897 and continued in Paris, 1900, Heidelberg, 1904, and Rome, 1908. The inviting body is the Cambridge Philosophical Society, and the project of receiving the fifth Congress at Cambridge has been well supported, not only by Cambridge men, resident and non-resident, but also by others, in Oxford and in the country generally, who are interested in the progress of mathematics.

The congress is organised in four sections, devoted respectively to analysis, geometry, applied mathematics, and philosophical, historical, and didactical questions. The Section of Applied Mathematics is divided into two departments, one dealing with mathematical physics and astronomy, and the other with economics and statistics. Each section appoints its own chairman from day to day, the chairman for the first day being chosen by an international committee from among those persons who, in the preparation for the congress, have been charged with the duty of collecting papers for the sections. The sections also appoint their own secretaries. The work of preparation has been in the hands of an organising committee, presided over by Sir George Darwin, and having as treasurer Sir Joseph Larmor, and as secretaries Prof. E. W. Hobson, of Cambridge, and Prof. A. E. H. Love, of Oxford.

Articulo de la revista Nature

Edmund Landau

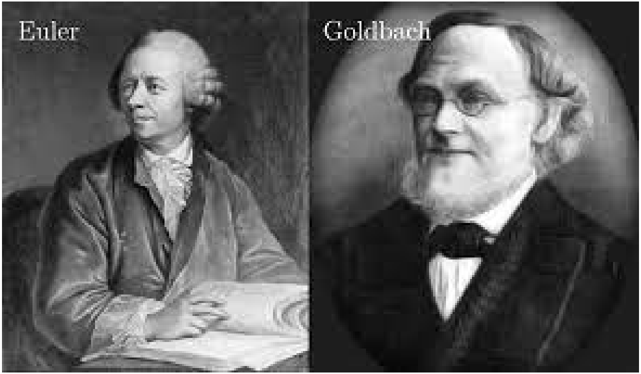
Edmund Landau

Contenido

La conjetura de Goldbach

- Conjetura fuerte :"Todo numero par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos numeros primos"
- Conjetura Debil :"Todo numero impar mayor que 5 puede escribirse como suma de 3 numeros primos"

Historia



Ideas Usadas

- Estudiar números con pocos factores primos, para intentar reducir hasta llegar a los primos.
- La idea principal es probar la conjetura para números suficientemente grandes, mayores que una constante, y probar los más pequeños de manera manual.
- Aplicar técnicas de análisis.

Teorema de Vinogradov

Para todo número natural suficientemente grande N, existe un N_0 tal que para $N > N_0$, N puede expresarse como la suma de tres números primos. Es decir, existen primos p_1, p_2, y p_3 tales que $N = p_1 + p_2 + p_3$.

Herramientas usadas

1. Metodo circular de Hardy-Litlewood: El Método del Círculo busca proporcionar aproximaciones para los coeficientes de una serie de potencias mediante integrales. Estas integrales, originalmente cercanas al círculo unitario, se dividen en arcos principales (donde se espera que la integral sea grande) y arcos menores (que se consideran insignificantes en comparación con los arcos principales).

El Método del Círculo es una forma de aproximar ciertas integrales. La configuración para el método original es la siguiente: Sea $f : D \to \mathbb{C}$ dada por una serie de potencias convergente $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Nos interesan los coeficientes a_n y, en particular, su comportamiento asintótico a medida que n tiende a infinito. Podemos expresar a_n como una integral de contorno, como se muestra en el siguiente lema.

Lema: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y C_r el círculo alrededor del origen de radio $r \in (0, 1)$ orientado en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z)\, dz.$$

Herramientas Usadas

teorema de Siegel–Walfisz:Define

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n),$$

. Luego, el teorema establece que para cualquier número real N, existe una constante positiva C_N que depende solo de N tal que

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\left(x \exp\left(-C_N (\log x)^{\frac{1}{2}}\right)\right),$$

siempre que $(a, q) = 1$ y $x \leq (\log x)^N$ y $q \leq (\log x)^N$.

Nota La expresión $\phi(x; q, a)$ se utiliza en la teoría analítica de números, específicamente en el contexto de la estimación de la cantidad de números primos en progresiones aritméticas.

Herrramientas usadas

Criva Brun: Dado un conjunto de enteros A sea P un conjunto de numeros primos. Para cada p de P sea A_p el conjunto de elementos de A divisibles por p. Entonces la criva estima el valor de

$$S(A, P, z) = |A - \bigcup_{p \in P} {}_{p<z} A_p|$$

Para elos se define

$$W(z) = \prod_{p \in P} (1 - \frac{w(p)}{p})$$

entonces

$$S(A, P, z) = |A| \cdot W(z) \cdot \left(1 + O\left((\log z)^{-b \log b}\right)\right) + O\left(z^{b \log \log z}\right)$$

dodne w es una funcion multiplicativa acotada , b es algun entero positivo

Avances

- Teorema de Vinogradov: Todo número impar suficientemente grande se puede expresar como la suma de 3 primos.
- Chen Jingrun: Todo número par suficientemente grande se puede expresar como la suma de 1 primo y un número con a lo sumo 2 factores primos.
- Lev Schnirelmann: Usando el cernedor de Brun probó que cada número natural es a lo sumo la suma de C primos, donde C se puede calcular.
- Olivier Ramare: En 1995, mostró que aplicando los métodos de Schnirelmann, todo número par es la suma de a lo sumo 6 primos.
- Harald Helfgott: Anunció tener una prueba de la conjetura débil en 2014 y fue aceptada en 2015.

Comprobaciones

bound	reference
1×10^4	Desboves 1885
1×10^5	Pipping 1938
1×10^8	Stein and Stein 1965ab
2×10^{10}	Granville et al. 1989
4×10^{11}	Sinisalo 1993
1×10^{14}	Deshouillers et al. 1998
4×10^{14}	Richstein 1999, 2001
2×10^{16}	Oliveira e Silva (Mar. 24, 2003)
6×10^{16}	Oliveira e Silva (Oct. 3, 2003)
2×10^{17}	Oliveira e Silva (Feb. 5, 2005)
3×10^{17}	Oliveira e Silva (Dec. 30, 2005)
12×10^{17}	Oliveira e Silva (Jul. 14, 2008)
4×10^{18}	Oliveira e Silva (Apr. 2012)

Contenido

Conjetura de los primos gemelos

Definicion:
Dos numeros primos se dicen son gemelos si uno es el anterior mas 2
Conjetura:
Existen infinitos numeros primos gemelos, es decir existen infitos p primos tales que p=q+2 donde q es primo

Historia

En el siglo XIX Alphonse de Polignac propuso que todo numero par puede expresarse de infinitas formas como diferencia de dos primos consecutivos. Siendo la conjetura el caso para el numero 2

Version de Hardy-Litlewood

Hardy propuso que para todo $\epsilon > 0$ el numero de primos gemelos hasta x esta dao por

$$\pi_2(x) = |p < x : p + 2 \; es \; primo = \Gamma \int_2^x \frac{dt}{log^2(t)} + O(x^{1/2+\epsilon})$$

Evidencia Numerica

x	$\pi_2(x)$	$\mathfrak{S}\,\mathrm{Li}_2(x)$
10	2	4.8...
10^2	8	13.5...
10^3	35	45.7...
10^4	205	214.2...
10^5	1224	1248.7...
10^6	8169	8248.0...
10^7	58980	58753.8...
10^8	440312	440367.7...
10^9	3424506	3425308.1...
10^{10}	27412679	27411416.5...
10^{11}	224376048	224368864.7...
10^{12}	1870585220	1870559867.8...
10^{13}	15834664872	15834598305.0...
10^{14}	135780321665	135780264894.4...
10^{15}	1177209242304	1177208491860.6...

Ideas Usadas

- Utilizar métodos de Çribas", representando a los primos mediante enteros pesados para facilitar el análisis. El problema es que estos métodos tienen dificultades al tratar de distinguir números con factores primos pares e impares.
- Acotar la brecha entre los primos. Aunque no se pueda probar que la diferencia entre dos primos sea siempre 2, se trata de encontrar valores fijos e ir reduciéndolos cada vez más.
- Estudiar la admisibilidad de un conjunto de funciones lineales. Un conjunto de funciones lineales es admisible si, para cada primo p, existe un n tal que al evaluar todas las funciones en n, ninguna de ellas tiene a p como factor.

Avances

1. Goldston, Pintz and Yıldırım: Probaron que para todo ϵ hay infinitos de primos distintos tal que $|p_1 - p_2| < \epsilon log(p_1)$
2. Richard Arentsorf: Propuso una prueba a la conjetura en 2004 la cua fue rechazada al contener muhcos errores.
3. Zhang: Prueba en 2013 que hay infinitos numeros primos que difieren por 70,000 millon lo mas.

$$|p_1 - p_2| < 70,000,000$$

Contenido

La conjetura

Entre n^2 y $(n+1)^2$ hay un numero primo como minimo para todo n natural


Legendre.
Legendre

Intentos

1. Albert Ingham: Demuestra que entre cubos n^3 y $(1+n)^3$ consecutivos hay un primo
2. Baker Harman y Pritz provaron que en el intervalo $[x - x^{0,5}, x]$ hay un numero primo

Contenido

La conjetura

hay infinitos números primos p tales que (p - 1) es un cuadrado perfecto. Dicho de otra forma, hay infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$ $n^2 + 1$.

Intentos

- teorema de Friedlander-Iwaniec: Teorema muestra que hay infinitos primos de la forma $A^2 + b^4$
- Iwaniec: Probo que hay infinitos numros de la froma $n^2 + 1$ con a lo mas 2 factores primos

Contenido

Referencias

David M.Burton
Elementary Number Theory.
7ma edición , 2011.

Eric W. Weisstein,
Goldbach Conjecture – from Wolfram MathWorld,
https://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html,
2023.

H. A. Helfgott,
The Ternary Goldbach Conjecture Is True,
arXiv:1312.7748 [math.NT],
https://arxiv.org/pdf/1312.7748.pdf, 2013

William L. Hosch,
Twin prime conjecture — Progress & Definition — Britannica,
https://www.britannica.com/science/twin-prime-conjecture, 2023.

Referencias

David M.Burton
VINOGRADOV'S THREE PRIME THEOREM.

L. A'Campo
The Circle Method, Applications to the Partition Function, and Beyond
https://nms.kcl.ac.uk/lambert.acampo/circlemethod.pdf

Brun's pure sieve https://planetmath.org/brunspuresieve

Referencias

R. C. BAKER, G. HARMAN and J. PINTZ
THE DIFFERENCE BETWEEN CONSECUTIVE PRIMES,. http://www.cs.umd.edu/~gasarch/BLOGPAPERS/BakerHarmanPintz.pdf

R. Alweiss, S luo
Bounded gaps between primes in short intervals
https://arxiv.org/abs/1707.05437

A. G. Shannon1 and J. V. Leyendekkers2 https://nntdm.net/papers/nntdm-23/NNTDM-23-2-117-125.pdf