Fracciones continuas infinitas
Buenas Aproximaciones

Wilfredo Gallegos Paz

Universidad del Valle de Guatemala
Teoría de la medida

21 de octubre de 2023

Tabla de contenido

Recordatorios

Teorema 15.2

El k-esimo convergente de la fraccion continua simple $[a_0; a_1, ..., a_n]$ tiene como valor

$$c_k = \frac{p_k}{q_k} \ni 0 \leq k \leq n$$

Teorema 15.3

Si $C_k = p_k/q_k$ es el k-esimo convergente de la fraccion continua finita simple $[a_0; a_1, ..., a_n]$, entonces

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \ni 1 \leq k \leq n$$

Corolario al teorema 15.3

Para $1 \leq q \leq n$, se cumple que p_k y q_k son primos relativos

Recordatorios

Teorema 15.7

Cada número irracional tiene una representación única como una fracción continua infinita.

Corolario al Teorema 15.7

Si p_n/q_n es el n-esimo convergente del numero irracional x, entonces

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Lema

Sea p_n/q_n la n-esima convergencia de la fracción continua que representa el numero irracional x. Si a y b son enteros tales que $1 \leq b < q_{n+1}$, entonces

$$|q_n x - p_n| \leq |bx - a|$$

Nota

Cabe resaltar que dado x es un numero irracional, x se encuentra entre su n-esima convergencia p_n/q_n y su consecutiva p_{n+1}/q_{n+1}.
Si $p_{n+1}/q_{n+1} < x < p_n/q_n$

$$\Rightarrow q_n x - p_n < 0 < q_{n+1} x - p_{n+1}$$

Si $p_n/q_n < x < p_{n+1}/q_{n+1}$

$$\Rightarrow q_{n+1} x - p_{n+1} < 0 < q_n x - p_n$$

Lo que nos dice que $(q_n x - p_n)$ y $(q_{n+1} x - p_{n+1})$ tienen distinto signo siempre

Lema

Sea p_n/q_n la n-esima convergencia de la fracción continua que representa el numero irracional x. Si a y b son enteros tales que $1 \leq b < q_{n+1}$, entonces

$$|q_n x - p_n| \leq |bx - a|$$

Demostración

Consideremos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} p_n\alpha + p_{n+1}\beta &= a \\ q_n\alpha + q_{n+1}\beta &= b \end{aligned}$$

Nótese que si $\beta < 0$,

$$\Rightarrow p_n\alpha = a - p_{n+1}\beta > 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

si $\alpha < 0$,

$$\Rightarrow q_{n+1}\beta = b - q_n\alpha > 0 \Rightarrow \beta > 0$$

Entonces α y β tienen distinto signo siempre.

Lema

demostración

calculamos el determinante de la matriz de coeficientes lo cual nos da lo siguiente(por el teorema 15.3)

$$p_n \cdot q_{n+1} - p_{n+1} \cdot q_n = (-1)^{n+1}$$

lo cual nos indica que existe una única solución al sistema.
Bajo un cambio de variables en el sistema obtenemos*

$$\alpha = (-1)^{n+1}(a \cdot q_{n+1} - b \cdot p_{n+1})$$
$$\beta = (-1)^{n+1}(b \cdot p_n - a \cdot q_n)$$

Nótese que si $\alpha = 0 \Rightarrow a \cdot q_{n+1} = b \cdot p_{n+1}$, por corolario al teorema 15.3 gcd(q_{n+1}, p_{n+1})=1 lo que implica que $q_{n+1}|b \Rightarrow b \geq q_{n+1}(\rightarrow\leftarrow)$
Entonces $\alpha \neq 0$. Por otro lado, si $\beta = 0$ llegamos a que

$$a = p_n\alpha, \ \& \ b = q_n\alpha*$$

Lema

Demostración

y de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} |b \cdot x - a| &= |q_n\alpha \cdot x - p_n\alpha| \\ &= |\alpha| \cdot |q_n \cdot x - p_n| \\ &\geq |q_n \cdot x - p_n| \end{aligned}$$

lo que nos demuestra el lema para el caso particular $\beta = 0$.
Ahora, para finalizar,

$$\begin{aligned} |bx - a| &= |(q_n\alpha + q_{n+1}\beta)x - (p_n\alpha + p_{n+1}\beta)| \\ &= |(q_n\alpha x - p_n\alpha) + (q_{n+1}\beta x - p_{n+1}\beta)| \\ &= |\alpha| \cdot |q_n x - p_n| + |\beta| \cdot |q_{n+1}x - p_{n+1}| \\ &\geq |q_n x - p_n| \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 15.8

Si $1 \leq b \leq q_n$, el numero racional a/b satisface

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| x - \frac{a}{b} \right|$$

Demostración

Por reducción al absurdo suponemos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| > \left| x - \frac{a}{b} \right|$$

entonces

$$|q_n x - p_n| = q_n \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| > b \left| x - \frac{a}{b} \right| = |bx - a|$$

$$\Rightarrow |q_n x - p_n| > |bx - a| (\rightarrow\leftarrow)$$

$\blacksquare$

Ejemplo 1

Ejemplo 1

El primer intento para conocer el valor de π aparece en el libro *Sobre la Medida del Círculo*, de Arquímides del año (287-212 B.C.) en la cual tuvo la siguiente aproximación

$$223/71 < \pi < 22/7$$

Del ejemplo de la clase anterior obtuvimos que

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, ...]$$

de este obtenemos que $C_1 = 3 + \frac{1}{7} = 22/7$, el teorema 15.8 nos asegura que no hay fracción con un denominador mas pequeño que brinde mejor aproximación. El Teorema 15.2 nos dice también que $C_2 = \frac{15 \cdot 22 + 3}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{333}{106}$, entonces el teorema nos dice que no existe racional con denominador menor a 106 que aproxime mejor al valor exacto de π.

Ejemplo 1

Calculando las aproximaciones tenemos

$$\left|\pi - \tfrac{22}{7}\right| \approx 0{,}0012645; \quad \left|\pi - \tfrac{223}{71}\right| \approx 0{,}0007476; \quad \left|\pi - \tfrac{333}{106}\right| \approx 0{,}0000832$$

El corolario al teorema 15.7 también es útil para calcular buenas aproximaciones. Por ejemplo, sabemos que $C_3 = \frac{1\cdot 333+22}{1\cdot 106+7} = \frac{355}{113}$. Aplicando el corolario a C_3 tenemos

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \leq \frac{1}{113 * 33102} = \frac{1}{3740526}$$

Teorema 15.9

Sea x un numero irracional arbitrario. Si el numero racional a/b, donde $b \geq 1$ y $\gcd(a, b) = 1$ satisface

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2} \tag{1}$$

entonces a/b es uno de los convergentes p_n/q_n en la representacion de x como fracción continua.

Demostración

Asumimos que a/b NO es uno de los convergentes de x. Esto quiere decir que

$$\frac{a}{b} \neq \frac{p_k}{q_k} = C_k$$

para todo convergente C_k de la fracción continua infinita.
De esto se puede asumir que

$$|a \cdot q_k - b \cdot p_k| > 0$$

Es decir, la diferencia anterior es un entero estrictamente mayor que 0.

Teorema 15.9

Demostración

Por otro lado, de la serie de k-convergentes de la fracción continua infinita que representa a x, sabemos que

$$q_k \leq q_{k+1} \ni k \geq 1$$

Como a/b no es un convergente, entonces existe algún n de la serie de convergentes tal que,

$$q_n \leq b < q_{n+1}$$

Usando la segunda desigualdad, el primer lema y la desigualdad del a hipotesis

$$|q_n x - p_n| \leq |bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b}$$

Sacando factor común q_n y despejando obtenemos

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2b \cdot q_n} \tag{2}$$

Teorema 15.9

Demostración

Ahora proponemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{bq_n} \leq \left|\frac{a \cdot q_n - b \cdot p_n}{bq_n}\right| &= \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &= \left|\frac{a}{b} + (x - x) - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\leq \left|\frac{a}{b} - x\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &< \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_n}\end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2bq_n} &< \frac{1}{2b^2} \\ \Rightarrow b &< q_n (\rightarrow\leftarrow)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2

Dada la fracción continua infinita $[1; 3, 1, 5, 1, 7, 1, 9, ...]$, econtrar las mejores aproximaciones a traves de un racional a/b con denominadores $b < 25$ y $b < 225$

Ejemplo 2

Procedemos a calcular los p_k y q_k necesarios

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1 & q_1 &= 1 \\
p_1 &= 3 \cdot 1 + 1 = 4 & q_1 &= 3 \\
p_2 &= 1 \cdot 4 + 1 = 5 & q_2 &= 1 \cdot 3 + 1 = 4 \\
p_3 &= 5 \cdot 5 + 4 = 29 & q_3 &= 5 \cdot 4 + 3 = 23 \\
p_4 &= 1 \cdot 29 + 5 = 34 & q_4 &= 1 \cdot 23 + 4 = 27 \\
p_5 &= 7 \cdot 34 + 29 = 267 & q_5 &= 7 \cdot 27 + 23 = 212 \\
p_6 &= 1 \cdot 267 + 34 = 301 & q_6 &= 1 \cdot 212 + 27 = 239
\end{aligned}
$$

Entonces las mejores aproximaciones con $b < 25$ y $b < 225$ son

$$C_3 = \frac{29}{23} \quad \text{y} \quad C_5 = \frac{267}{212}$$

Referencias

David M.Burton
Elementary Number Theory.
7ma edición , 2011.

¿Preguntas?
Muchas gracias
gal20399@uvg.edu.gt