Fracciones Continuas Infinitas

Pablo Stefan Quintana

Universidad del Valle de Guatemala
Teoría de Números

06 de octubre del 2023

Como se representan

Estas se representan como:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

Un ejemplo es:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

Fracciones Continuas Infinitas Simples

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Utilizando la notación mostrada anteriormente:

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...]$$

Ahora, surge la pregunta:

Converge?

Recordemos que:

- $p_0 = a_0$
- $p_1 = a_1 a_0 + 1$
- $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$
- $q_0 = 1$
- $q_1 = a_1$
- $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$

Converge?

Por teorema 15.4 se tiene que:

$$C_0 < C_2 < C_4 < ... < C_{2n} < ... < C_{2n+1} < ... < C_5 < C_3 < C_1$$

Sean α, α' tal que $C_{2n} < \alpha$, $\alpha' < C_{2n+1}$ y $\alpha < \alpha'$
Entonces se tiene que:

$$\alpha' - \alpha < C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} < \frac{1}{q_{2n}^2}$$

Definición 15.3

Si $a_0, a_1, a_2, ...$ son una secuencia infinita de enteros, todos positivos excepto posiblemente a_0 entonces la fracción simple continua infinita $[a_0; a_1, a_2, ...]$ tiene como valor:

$$lim_{n \to \infty}[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

Otra notación:
En caso de tener una fracción de la siguiente forma:
$[a_0 : a_1, ..., b_1, b_2, ..., b_n, b_1, b_2, ..., b_n, ...]$
Se escribirá como:
$[a_0 : a_1, ..., b_2, \overline{...}, b_n]$

Teorema 15.5

El valor de una fracción infinita continua es un número irracional

Demostración.

Sea x el límite de $[a_0 : a_1, a_2, ...]$ y llámese $C_n = [a_0; a_1, ..., a_n]$

Ya que $C_n < x < C_{n+1}$ Entonces:

$0 < |x - C_n| < |C_{n+1} - C_n| = |\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

Ahora por contradicción supóngase que $x \in \mathbb{Q}$ Entonces: $x = \frac{a}{b}$

Siguiendo con lo anterior:

$0 < |\frac{a}{b} - C_n| = |\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}}$

Pero ya que q_i es monótona creciente, a partir de cierto N: $q_{n+1} > b$

Entonces:

$0 < |aq_n - bp_n| < 1$

□

Teorema 15.6

Si $[a_0; a_1, a_2, ...]$ y $[b_0; b_1, b_2, ...]$ son iguales entonces $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$

Demostración.

Sea $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ Entonces $C_0 < x < C_1$ equivalente a
$a_0 < x < a_0 + 1$ Por lo tanto $\lfloor x \rfloor = a_0$
Análogamente con $[b_0; b_1, b_2, ...]$ se obtiene que $\lfloor x \rfloor = b_0$
Entonces: $a_0 = b_0$
Ahora, se sabe que:
$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, ...]} = a_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, b_3, ...]}$
Pero como $a_0 = b_0$ se tiene que:
$[a_1; a_2, a_3, ...] = [b_1; b_2, b_3, ...]$ Repitiendo el proceso realizado para $n = 0$ se tiene que para todo $n \geq 0$ $a_n = b_n$

$\square$

Corolario

Dos fracciones infinitas continuas distintas representan dos irracionales distintos

Demostración.

Sean $[a_0; a_1, a_2, ...]$, $[b_0; b_1, b_2, ...]$ tal que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_n \neq b_n$
Por lo tanto, por contrapuesta del teorema 15.6 se tiene que:
$[a_0; a_1, a_2, ...] \neq [b_0; b_1, b_2, ...]$ $\square$

Ejemplo, encontrar el número irracional

Sea $x = [3; 6, \overline{1, 4}]$ y sea $y = [\overline{1; 4}]$
Por lo tanto:

$$y = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}}$$

Pasandolo a ecuación cuadrática:
$4y^2 - 4y - 1 = 0$, se obtiene que: $y = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
Entonces:

$$x = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}} = \frac{14 - \sqrt{2}}{4}$$