Fracciones de Farey

Ana Sofía Escobar

Universidad del Valle de Guatemala
Facultad de ciencias y humanidades
Teoría de Números

12 de octubre de 2023

Contenido

Definición

Definition

Las fracciones o secuencias de Farey (F_n) de orden n se definen como un conjunto de números racionales $\frac{r}{s}$ con $0 \leq r \leq s \leq n$ y $(r, s) = 1$.

- Las secuencias de Farey tienen la particularidad de que cada secuencia va desde 0 a 1 en orden creciente.

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

¿Cómo construirlas?

Para construir las fracciones de Farey se sigue una serie de pasos realmente fáciles:

1. Construimos fracciones desde el numerador 0 y denominador 1 hasta el numerador y denominador n de la siguiente manera:

$$F_n = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\}$$

2. Se reducen todas las fracciones de tal modo que se cumpla (r,s) = 1.
3. Se eliminan los repetidos.
4. Se ordenan de forma creciente.

Ejemplo

1. Construimos fracciones desde el numerador 0 y denominador 1 hasta el numerador y denominador n de la siguiente manera:

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right\}$$

2. Se reducen todas las fracciones de tal modo que se cumpla (r,s) $=1$.

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

3. Se eliminan los repetidos.

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

4. Se ordenan de forma creciente.

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Fracción mediante

Definition

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son dos fracciones pertenecientes a una secuencia de Farey F_n entonces su fracción mediante es $\frac{a+c}{b+d}$.

Estas fracciones pueden generar terminos de las secuencias de Farey F_n utilizando fracciones de la secuencia anterior F_{n-1}.

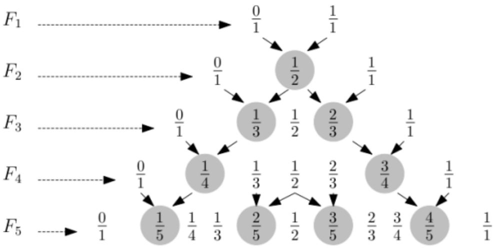

Figura 1: Fracciones mediantes

Teorema

Theorem

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en una secuencia de Farey F_n entonces $bc - ad = 1$.

Demostración.

Notese que para $n = 1$: $F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} \Rightarrow 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$. Entonces con fines de inducción supongamos que es verdadero para F_{n-1} y entonces se cumple que $bc - ad = 1$. Cualquier fracción consecutiva en F_n puede ser cualquiera de las siguientes:

$$\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\}, \left\{\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right\}, \left\{\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right\}$$

$\square$

Continuación prueba

Demostración.

Para el primer par de términos consecutivos, ya sabemos que $bc - ad = 1$. Para los dos siguientes, obtenemos:

$$b(a+c) - a(b+d) = ab + bc - ab - ad = bc - da = 1,$$

$$c(b+d) - d(a+c) = cb + cd - ad - cd = bc - ad = 1.$$

Por lo tanto, si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en una secuencia de Farey F_n entonces $bc - ad = 1$. $\square$

Ejemplo

Consideremos a

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

y tomemos a $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ como terminos consecutivos, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{c}{d}$$

Aplicando el teorema anterior observamos que:

$$bc - ad = (2)(2) - (1)(3) = 4 - 3 = 1$$

Teorema

Theorem

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces su mediante $\frac{a+c}{b+d}$ se encuentra entre ellos, es decir, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Demostración.

A partir del teorema anterior podemos deducir que si $bc - ad = 1$ entonces $ad - bc = -1$ y entonces:

$$a(b+d) - b(a+c) = ad - bc < 0 \Rightarrow a(b+d) < b(a+c),$$
$$(a+c)d - (b+d)c = ad - bc < 0 \Rightarrow (a+c)d < (b+d)c,$$

Entonces, tenemos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

$\square$

Ejemplo

Consideremos a

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

y tomemos a $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ como terminos de la secuencia, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \frac{c}{d}$$

Aplicando el teorema anterior observamos que:

$$\frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Y en F_4 se observa que:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

Teorema

Theorem

Para cualquier número irracional $0 < x < 1$ *y cualquier entero* $n > 0$*, existe una fracción* $\frac{p}{q} \in F_n$ *tal que* $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$.

Demostración.

Consideremos a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ como fracciones consecutivas en la secuencia de Farey F_n tales que:

$$\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d} \text{ ó } \frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d}$$

En donde $\frac{a+c}{b+d}$ es la mediante de las dos fracciones. $\square$

Continuacion prueba

Demostración.

Por el teorema anterior sabemos que $bc - ad = 1$ y $b + d \geq n + 1$, podemos ver que para $\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d}$:

$$\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow x - \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} < \frac{1}{b(n+1)}$$

$$\Rightarrow x - \frac{a}{b} < \frac{1}{b(n+1)} \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|\frac{1}{b(n+1)}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b(n+1)}$$

De manera similiar para $\frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d}$:

$$\frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} - x < \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} < \frac{1}{d(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} - x < \frac{1}{d(n+1)} \Rightarrow \left|\frac{c}{d} - x\right| = \left|x - \frac{c}{d}\right| < \left|\frac{1}{d(n+1)}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{d(n+1)}$$

Finalmente notese que si tomamos $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ ó $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$ dependiendo del caso, entonces $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$. □

Corolario

Corollary

Dado un número irracional positivo x *y un número entero* $n > 0$*, existe un número racional* $\frac{a}{b}$*, con* $0 < b \leq n$*, tal que* $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b(n+1)}$.

Demostración.

La función escalonada o mayor entero nos permite escribir $x = [x] + r$ con $0 < r < 1$ en donde $[x]$ representa la parte entera de x y r la parte decimal.Por el teorema anterior sabemos que existe una fración $\frac{p}{q}$ en donde:

$$|r - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$$

En este caso, si tomamos $a = [x]q + p$ y a b=q, obtenemos que:

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|x - \frac{[x]q + p}{q}\right| = \left|r - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q(n+1)} = \frac{1}{b(n+1)}$$

$\square$

Ejemplo

Ejercicio: Encontrar $\frac{a}{b}$, con $0 < b < 5$, tal que $|\sqrt{7} - \frac{a}{b}| < \frac{1}{6b}$

.

La función mayor entero produce $\sqrt{7} - \lfloor\sqrt{7}\rfloor = \sqrt{7} - 2 = 0{,}64755\ldots$ Observe que en la secuencia de Farey F_5, el valor $0{,}64755\ldots$ se encuentra en el intervalo entre las fracciones consecutivas $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$. Entonces, la mediante de estas dos fracciones es $\frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8} = 0{,}625$, de modo que $\frac{5}{8} < 0{,}64755\ldots$ y entonces $\frac{5}{8} < 0{,}64755\ldots < \frac{2}{3}$. Del teorema anterior, tenemos:

$$\left|0{,}64755\ldots - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{6(3)}$$

El argumento empleado en el corolario traslada esta desigualdad a:

$$\left|\sqrt{7} - \frac{8}{3}\right| < \frac{1}{6(3)}$$

¿Preguntas?

Referencias

[1] David Burton. «ELEMENTARY NUMBER THEORY». En: cap 15 (2009), págs. 334-337.

[2] Soham Das. «Properties of Farey Sequence and their Applications to Digital Image Processing». En: arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1509/1509.077 (SF).

[3] Niven-Zuckerman. «An Introduction to the Theory of Numbers». En: 7.cap 7 (1991), págs. 297-306.

[4] Utkarsh Trivedi. «Farey Sequence». En: www.geeksforgeeks.org/farey-sequence/ (SF).