Teoría de números

Fracciones continuas infinitas

Rudik Rompich

6 de octubre de 2023

Universidad del Valle de Guatemala

Teoremas

Teorema (15.1)
Cualquier número racional se puede escribir como una fracción continua simple finita.

Definición (15.2)
La fracción continua formada por $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *cortando la expansión después del* k *ésimo denominador parcial* a_k *se llama* k *ésimo convergente de la fracción continua dada y se denota por* C_k*; en símbolos,*

$$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] \quad 1 \leq k \leq n$$

Dejamos que el convergente cero C_0 *sea igual al número* a_0*.*

Teoremas

Teorema (15.2)
El k ésimo convergente de la fracción continua simple $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *tiene el valor*

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \quad 0 \leq k \leq n$$

Teorema (15.3)
Si $C_k = p_k/q_k$ *es el késimo convergente de la fracción continua finita simple* $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, *entonces*

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \quad 1 \leq k \leq n$$

Teoremas

Corolario
Para $1 \leq k \leq n$, p_k y q_k son primos relativos.

Lema
Si q_k es el denominador del k ésimo C_k convergente de la fracción continua simple $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, entonces $q_{k-1} \leq q_k$ para $1 \leq k \leq n$, con desigualdad estricta cuando $k > 1$.

Teoremas

Teorema (15.4)

1. *Los convergentes con subíndices pares forman una secuencia estrictamente creciente; eso es,*

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots$$

2. *Los convergentes con subíndices impares forman una secuencia estrictamente decreciente; eso es,*

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots$$

3. *Todo convergente con subíndice impar es mayor que todo convergente con subíndice par.*

Teorema (15.5)
El valor de cualquier fracción continua infinita es un número irracional.

Teorema (15.6)
Si las infinitas fracciones continuas $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *y* $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ *son iguales, entonces* $a_n = b_n$ *para todos* $n \geq 0$.

Corolario
Dos fracciones continuas infinitas distintas representan dos números irracionales distintos.

Teorema

Teorema
Cada número irracional tiene una representación única como una fracción continua infinita.

Demostración

Definiciones

Definición

Una fracción continua infinita es una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

Definición

Caso particular

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Definiciones

Definición
Tenemos

1. *Usamos la notación compacto* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *para denotar dicha fracción.*
2. *Cada una de las fracciones continuas finitas se define como*

$$C_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad n \geq 0$$

3. *El valor de la fracción continua infinita* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *es el límite de la secuencia de números racionales* C_n*, siempre que este límite exista.*
4. *En una especie de abuso de notación, usaremos* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *para indicar no sólo la fracción continua infinita, sino también su valor.*

Demostración

La idea es establecer que un número irracional arbitrario x_0 se puede expandir a una fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ que converge al valor x_0.

Demostración

La secuencia de números enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se define de la siguiente manera: Usando la función piso, tenemos

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]} \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]} \quad x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]} \cdots$$

en donde

$$a_0 = [x_0] \quad a_1 = [x_1] \quad a_2 = [x_2] \quad a_3 = [x_3] \cdots$$

Demostración

Entonces en general, los a_k están dados por la expresión

$$a_k = [x_k] \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k} \quad k \geq 0$$

NOTA
Notamos que x_{k+1} es irracional cuando x_k es irracional: entonces como x_0 es irracional, todos los x_k son irracionales también.

Demostración

Entonces por la propiedades de la función piso,

$$0 < x_k - a_k = x_k - [x_k] < 1$$

lo que nos permite decir

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k} > 1$$

en donde cada entero $a_{k+1} = [x_{k+1}] \geq 1$ para cada $k \geq 0$.

Demostración

Entonces despejamos para x_k

$$x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}} \quad k \geq 0$$

Con nuestras relaciones vamos substituyendo:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} \\ &\vdots \\ &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] \end{aligned}$$

para cada entero positivo n.

Demostración

Esto nos hace sospechar que x_0 es el valor de la fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Demostración

Para cualquier entero fijo n, los primeros $n+1$ convergentes $C_k = p_k/q_k$, donde $0 \leq k \leq n$, de $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ son iguales que los primeros $n+1$ convergentes de la fracción continua finita $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$.

Demostración

Si denotamos el $(n+2)$ésimo convergente de este último por C'_{n+1}, entonces el argumento utilizado en la demostración del Teorema 15.2 para obtener C_{n+1} de C_n reemplazando a_n por $a_n + 1/a_{n+1}$ funciona igualmente bien en la configuración actual; esto nos permite obtener C'_{n+1} de C_{n+1} reemplazando a_{n+1} por x_{n+1}:

$$\begin{aligned} x_0 = C'_{n+1} &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] \\ &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} \end{aligned}$$

Demostración

Con esto, obtenemos

$$
\begin{aligned}
x_0 - C_n &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{(-1)\left(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}\right)}{\left(x_{n+1} q_n + q_{n-1}\right) q_n} = \frac{(-1)^n}{\left(x_{n+1} q_n + q_{n-1}\right) q_n}
\end{aligned}
$$

La última desigualdad se da por el teorema 15.3.

Demostración

Volvemos a como definimos nuestras relaciones, tenemos $x_{n+1} > a_{n+1}$, y entonces

$$|x_0 - C_n| = \frac{1}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})\, q_n} < \frac{1}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})\, q_n} = \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

Como q_k están incrementando, podemos concluir

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} C_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

Cada número irracional tiene una representación única como una fracción continua infinita.

Ejemplo

Considérese $x = \sqrt{23} \approx 4{,}8$. Los números irracionales sucesivos x_k (y por lo tanto los números enteros $a_k = [x_k]$) se pueden calcular con bastante facilidad, con los cálculos que se exponen a continuación:

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = \sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4) & a_0 = 4 \\
x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{\sqrt{23}-4} = \frac{\sqrt{23}+4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23}-3}{7} & a_1 = 1 \\
x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{7}{\sqrt{23}-3} = \frac{\sqrt{23}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23}-3}{2} & a_2 = 3 \\
x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{2}{\sqrt{23}-3} = \frac{\sqrt{23}+3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23}-4}{7} & a_3 = 1 \\
x_4 = \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{7}{\sqrt{23}-4} = \sqrt{23} + 4 = 8 + (\sqrt{23} - 4) & a_4 = 8
\end{array}
$$

porque $x_5 = x_1$, también $x_6 = x_2, x_7 = x_3, x_8 = x_4$; luego obtenemos $x_9 = x_5 = x_1$, y así sucesivamente, lo que significa que el bloque de números enteros $1, 3, 1, 8$ se repite indefinidamente. Encontramos que la expansión fraccionaria continua de $\sqrt{23}$ es periódica con la forma

$$
\begin{aligned}
\sqrt{23} &= [4; 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \ldots] \\
&= [4; \overline{1, 3, 1, 8}]
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

Hacemos los cálculos

$$\begin{aligned}
x_0 &= \pi = 3 + (\pi - 3) & a_0 &= 3 \\
x_1 &= \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{0{,}14159265\cdots} = 7{,}06251330\cdots & a_1 &= 7 \\
x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{1}{0{,}06251330\cdots} = 15{,}99659440\cdots & a_2 &= 15 \\
x_3 &= \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{1}{0{,}99659440\cdots} = 1{,}00341723\cdots & a_3 &= 1 \\
x_4 &= \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{1}{0{,}00341723\cdots} = 292{,}63467\cdots & a_4 &= 292 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Entonces tenemos π,

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$$

Referencias

- Burton, David. EBOOK: Elementary Number Theory. McGraw Hill, 2010.