Fracciones Continuas

Introducción y k-convergencia

Guillermo Furlan Estrada

Universidad del Valle de Guatemala
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Octubre de 2023

Contenido

Contenido

Contexto

Figura: Rafael Bombelli

Figura: Leonardo de Pisa

Contenido

Fracciones Continuas

Una fracción continua es aquella fracción que tenga la siguiente forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales, y la notación es $[a_0, ..., a_n]$

Teorema 1

Teorema : Cualquier número racional puede ser representado como una fracción continua finita.

Prueba :

Sean a, b números enteros tal que $b > 0$ aplicando el algoritmo de Euclides

$$
\begin{aligned}
a &= ba_0 + r_1 & \quad 0 < r_1 < b \\
b &= r_1 a_1 + r_2 & \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 a_2 + r_3 & \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_{n-1} + r_n & \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n a_n + 0
\end{aligned}
$$

Dado que los residuos son enteros positivos, se puede reescribir las expresiones del algoritmo

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n$$

Usando la expresión anterior de b/r_1

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\dfrac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}}$$

Repitiendo este procedimiento con las ecuaciones se obtiene

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Ejemplo

Expresar 19/51 como fracción continua

$$\begin{array}{rcr} 51 = 2\cdot 19 + 13 & \text{or} & 51/19 = 2 + 13/19 \\ 19 = 1\cdot 13 + 6 & \text{or} & 19/13 = 1 + 6/13 \\ 13 = 2\cdot 6 + 1 & \text{or} & 13/6 = 2 + 1/6 \\ 6 = 6\cdot 1 + 0 & \text{or} & 6/6 = 1 \end{array}$$

$$\frac{19}{51} = \frac{1}{\frac{51}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{13}{19}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{19}{13}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{13}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}}}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}$$

entonces $19/51 = [0,2,1,2,6]$

Contenido

fracción continua k-convergente

Dada una fracción continua $[a_0, a_1, ..., a_k, ..., a_n]$ la que se froma de tomar los primeros k elementos se llama la fracción k-convergente y se denota

$$C_k = [a_0, a_1, ..., a_k] \;\; 1 < k < n$$

Nota:
Cuando $k < n$ entonces

$$C_{k+1} = [a_0, ..., a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

valores p_k, q_k

Defínanse los números p_k , q_K de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= a_0 & q_0 &= 1 \\
p_1 &= a_1 * a_0 + 1 & q_1 &= a_1 \\
p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}
\end{aligned}
$$

Teorema

Teorema: La fracción k-convergente de una fracción continua simple $[a_0, ..., a_n]$ tiene el valor

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}$$

Prueba: Notese que el teorema se cumple para C_2. supóngase por fines de inducción que para k=m el teorema se cumple entonces

$$C_m = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}$$

Nótese que los enteros $p_{m-1}, q_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-2}$ no dependen de a_m entonces, la expresión anterior no varía para la fracción $[a_0, ..., a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}]$ y por la nota anterior

$$C_{m+1} = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} =$$

$$\frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} = \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}}$$

por lo que para k=m+1 el teorema se cumple por lo que por inducción el teorema queda demostrado.

Ejemplo

Recordando 19/51=[0,2,1,2,6] entonces

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0 & q_0 &= 1 \\
p_1 &= 0*2+1=1 & q_1 &= 2 \\
p_2 &= 1*1+0=1 & q_2 &= 1*2+1=3 \\
p_3 &= 2*1+1=3 & q_3 &= 2*3+2=8 \\
p_4 &= 6*3+1=19 & q_4 &= 6*8+3=51
\end{aligned}$$

Notación alternativa

Una forma diferente de definir los números p_k, q_k es

$$p_{-2} = 0, p_{-1} = 1 \qquad q_{-2} = 1, q_{-1} = 0$$

entonces queda

$$p_k = a_K p_{k-1} + p_{k-2} \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Dado [2,3,1,4,2]

k	-2	-1	0	1	2	3	4
a_k			2	3	1	4	2
p_k	0	1	2	7	9	43	95
q_k	1	0	1	3	4	19	42
C_k			2/1	7/3	9/4	43/19	95/42

Ejemplo

Considérese la fracción continua [0,1,1,...,1] es aquella que todo denominador es q, observese sus primeras convergencias

$$c_0 = 0/1, \quad c_1 = 1/1, \quad c_2 = 1/2, \quad c_3 = 2/3, \quad c_4 = 3/5$$

usando el teorema anterior se tiene que el numerador de la k-convergencia es

$$p_k = 1 * p_{k-1} + p_{k-2} = U_k$$

y el denominador

$$q_k = 1 * q_{k-1} + q_{k-2} = p_k + p_{k-1} = U_{k+1}$$

donde U_k es el k número de fibonacci.

Contenido

Referencias

David M.Burton
Elementary Number Theory.
7ma edición , 2011.
.