Teoría de Números 2023

Lista 04

22.agosto.2023

1. Resolver las congruencias
   a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$,
   b) $6x \equiv 15 \pmod{21}$,
   c) $36x \equiv 8 \pmod{102}$,

2. Hallar todas las soluciones de la congruencia lineal $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$.

3. Resolver la congruencia $17x \equiv 3 \pmod{210}$.

4. Hallar el inverso de 666 módulo 2023.

5. Muestre que las congruencias
$$x \equiv a \pmod{n} \qquad \text{y} \qquad x \equiv b \pmod{m},$$
   admiten una solución simultánea si, y sólo si, $(m, n) \mid a - b$.
   Si una solución simultánea (x, y) existe, muestre que esta es única módulo $[m, n]$.

6. Probar que:
   El sistema de congruencias lineales en 2 variables
$$\begin{aligned} ax + by &\equiv r \pmod{n}, \\ cx + dy &\equiv s \pmod{n}, \end{aligned}$$
   posee solución única módulo n si $(ad - bc, n) = 1$. La condición anterior es equivalente a requerir que la matriz del sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2\times 2}$, tenga inversa también en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2\times 2}$.

   Usar este resultado para hallar todas las soluciones del sistema de congruencias
$$\begin{aligned} 3x + 4y &\equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x + 5y &\equiv 7 \pmod{13}. \end{aligned}$$

7. Confirme que $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ es un número de Carmichael.

8. Implemente en Python el Test de primalidad de Fermat (utilice $k = 8$ repeticiones del test). (Agregar el código de la función que ejecuta el test, sólo de la función, en su tarea impresa. Esta función no debería ser mayor a 15 ó 20 líneas de código).

   Luego, evaluar en su test si los siguientes números son primos o no:
$$1317, 2709, 3257, 3911, 4279, 5497, 6311, 7223, 8431, 9203.$$

   Compare con una tabla de primos para indicar si su test da la respuesta correcta (aquí la respuesta correcta se entiende que en el caso de n ser primo, el test responde que n es probablemente primo).

   Una tabla de primos puede encontrarse en `https://primes.utm.edu/lists/small/10000.txt`.