Teoría de Números 2023

Lista 02

14.julio.2023

1. Probar que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{N}$, valen

   a) $[(a, b), (a, c)] = (a, [b, c])$.

   b) $(ab, ca, bc)(a, b, c) = (a, b)(c, a)(b, c)$.

2. Sea F_n la secuencia de números de Fibonacci, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.
   Muestre que para todo $n \geq 1$, si $a = F_n$ y $b = F_{n+1}$, entonces el algoritmo de Euclides para encontrar (a, b) ejecuta exactamente n divisiones.

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución entera? En caso afirmativo, encuentre una solución de dicha ecuación.

   i) $6x + 51y = 22$.
   ii) $14x + 35y = 93$.
   iii) $33x + 14y = 115$.

4. Determine todos los pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que el menor múltiplo común de a y b es $2^3 \cdot 5^7 \cdot 11^{13}$.

5. Para $n \geq 1$, y $a, b \in \mathbb{Z}^+$, muestre que

   a) Si $(a, b) = 1$, entonces $(a^n, b^n) = 1$.
   b) Si $a^n \mid b^n$, entonces $a \mid b$.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un divisor positivo de 2023^{99}, éste sea un múltiplo de 2023^{77}?

7. Un entero se llama **libre de cuadrados** si no es divisible por el cuadrado de ningún entero.

   a) Pruebe que un entero $n > 1$ es un cuadrado si, y sólo si, en la factoración en primos canónica de n todos los exponentes son pares.
   b) Muestre que $n > 1$ es libre de cuadrados si, y sólo si, admite una factoración como producto de primos distintos.
   c) Todo entero $n > 1$ es el producto de un cuadrado perfecto, y un entero libre de cuadrados.
   d) Verifique que todo entero $n \in \mathbb{Z}$ puede expresarse en la forma $n = 2^k m$, donde $k \geq 0$ y m es un número impar.

8. Si $n > 1$ no es primo, entonces $M_n = 2^n - 1$ no es un primo de Mersenne. Esto es, muestre que si $d \mid n$, entonces $2^d - 1 \mid 2^n - 1$.
   Verifique que $2^{35} - 1$ es divisible por 31 y por 127.

9. Usando la prueba del Algoritmo de la División, elabore en Python una función que calcule el cociente y el residuo de dos enteros.
   Su función debe recibir como argumentos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, y debe devolver el cociente y el residuo $q, r \in \mathbb{Z}$, tales que

   $$b = aq + r, \qquad 0 \leq r < |a|.$$

   Testar su función con diferentes casos (positivos y negativos) y verificar que funciona correctamente.

10. **El problema de Basilea.** Considere una retícula rectangular en $\mathbb{Z}^2$ y tome R una región finita. Por ejemplo, un cuadrado $R = ([-r, r] \times [-r, r]) \cap \mathbb{Z}^2$.
    Estimar la densidad de pares primos relativos (p, q) dentro de R, mediante un algoritmo que cuente los pares primos relativos.

    Experimente con diferentes regiones, y proporcione evidencia de que la densidad de pares coprimos es $\frac{6}{\pi^2}$.
