Promedios de Funciones Aritméticas

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 32) 07.noviembre.2023

Otras Funciones Aritméticas

Vimos funciones aritméticas como $\mu(n)$, $\varphi(n)$, $\Lambda(n)$.
Existen muchas otras.

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha = x^\alpha * \mathbf{1}, \qquad \alpha \geq 0.$$

Ejemplos:

$$d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 = \text{ número de divisores positivos de } n.$$

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d = \text{ suma de los divisores positivos de } n.$$

La función de Liouville:

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r}, \text{ siempre que } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Funciones Aritméticas

Considere la función $d(n)$, el número de divisores de n.

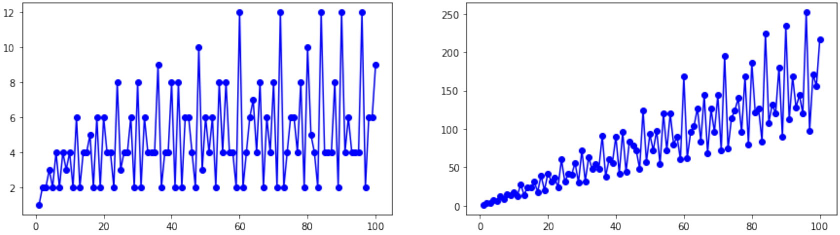
Esta función toma en el valor 2 infinitamente (cuando n es primo) y también toma arbitrariamente valores grandes cuando n tiene un gran número de divisores. De hecho, los valores $d(n)$ fluctúan considerablemente a medida que n aumenta.

Muchas funciones aritméticas fluctúan de esta manera y a menudo es difícil determinar su comportamiento para n grande. A veces es más fructífero estudiar la media aritmética

$$\widetilde{f}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Promedios de Funciones Aritméticas

La mayoría de funciones aritméticas fluctúan.



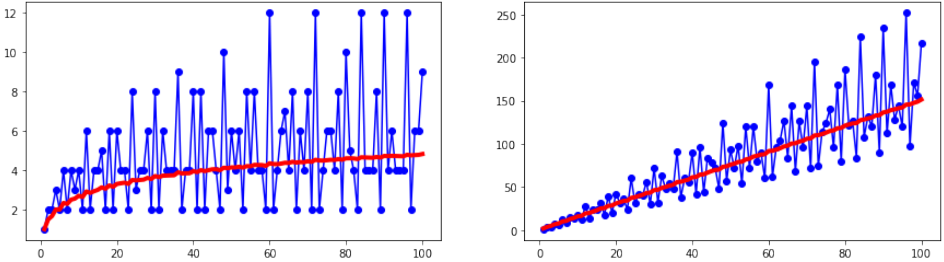
(a) La función $d(n)$; (b) La función $\sigma(n)$.

Muchas veces es mas útil estudiar la media de f: $\widetilde{f} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k),$

y ver cómo esta media crece asintóticamente.

Promedios de Funciones Aritméticas

Por ejemplo,



(a) La función $d(n)$; (b) La función $\sigma(n)$; junto con sus promedios.

Pareciera que para la función del número de divisores $d(n)$, el promedio $\widetilde{d}(n)$ crece parecido al logaritmo. Por otro lado, para la función suma de divisores $\sigma(n)$, el promedio $\widetilde{d}(n)$ crece similar a una función lineal.

Promedios de Funciones Aritméticas

De hecho, es posible mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(n)}{\log n} = 1.$$

(o sea que ambas tiene un comportamiento asintótico equivalente).

Para conocer el comportamiento de la media $\widetilde{f}$, precisamos conocer cómo se comportan las sumas parciales $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Frecuentemente es más conveniente reemplazar la variable discreta n, por una variable continua $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\sum_{k\leq x} f(k).$$

Notación Asintótica

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definición

*Si $g(x) > 0$ para $x \geq a$, decimos que **f es O grande respecto de g**, denotado $f(x) = O\big(g(x)\big)$, si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\big|f(x)\big| \leq Mg(x), \quad \forall\, x \geq a.$$

Una ecuación de la forma $f(x) = h(x) + O\big(g(x)\big)$, significa que

$$f(x) - h(x) = O\big(g(x)\big).$$

Recordar las otras notaciones: *little o*, *big* Ω, *big* Θ.

Notación Asintótica

En teoría de números, es común utilizar la **notación de Vinogradov**:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\ll g(x), && \text{si } f(x) = O\big(g(x)\big); && (1)\\
f(x) &\gg g(x), && \text{si } g(x) = O\big(f(x)\big); && (2)\\
f(x) &\asymp g(x), && \text{si } f(x) \ll g(x) \text{ y } g(x) \ll f(x); && (3)\\
f(x) &\sim g(x), && \text{si } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. && (4)
\end{aligned}
$$

Propiedad

Si $f(t) = O(g(t))$, *para* $t \geq a$, *entonces* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = O\Big(\int_a^x g(t)\,dt\Big)$, $x \geq a$.

Prueba: Como $f(t) = O(g(t))$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Mg(t), \;\; \forall\, t \geq a$. Luego

$$\Big|\int_a^x f(t)\,dt\Big| \;\leq\; \int_a^x |f(t)|\,dt \;\leq\; \int_a^x Mg(t)\,dt \;=\; M\int_a^x g(t)\,dt$$

para todo $x \geq a$, y se verifica el resultado. $\square$

Teorema (Fórmula de Sumas de Euler)

Si f tiene derivada continua en el intervalo (y, x), $0 < y < x$, entonces

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y).$$

Prueba: Sean $m = \lfloor y \rfloor$, $k = \lfloor x \rfloor$. Para enteros $n, n-1 \in (y, x]$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt &= \int_{n-1}^{n} (n-1) f'(t)\,dt = (n-1)\big(f(n) - f(n-1)\big)\\ &= nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n).\end{aligned}$$

Sumando lo anterior desde $n = m+2$ hasta k, obtenemos

$$\int_{m+1}^{k} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt = kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{n=m+2}^{k} f(n) = kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{y<n\leq x} f(n).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} &= -\int_{m+1}^{k} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt + kf(x) - mf(m+1) \\
&= -\int_{y}^{k} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt + kf(x) - mf(m+1) + \\
&= -\int_{y}^{x} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt + kf(x) - mf(m+1) + \int_{y}^{m+1} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt \\
&= -\int_{y}^{x} \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt + kf(x) - mf(y) \\
&= -\int_{y}^{x} t f'(t)\,dt + \int_{y}^{x} (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + kf(x) - mf(y).
\end{aligned}$$

Funciones Aritméticas

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} &= \int_y^x f(t)\,dt - xf(x) + yf(y) + \int_y^x (t-\lfloor t\rfloor) f'(t)\,dt + kf(x) - mf(y)\\ &= \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-\lfloor t\rfloor) f'(t)\,dt + (y-\lfloor y\rfloor) f(y) - (x-\lfloor x\rfloor) f(x).\end{aligned}$$

Definimos la **función zeta de Riemann** como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{para } s > 1.$$

En el intervalo $0 < s < 1$, usamos la notación $\zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right)$.

Teorema *Para $x \geq 1$, valen*

a) $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O(\frac{1}{x})$.

b) $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$, $s > 0$, $s \neq 1$.

c) $\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$, $s > 1$.

d) $\sum_{n \leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$, $\alpha \geq 0$.

C es la constante de Euler-Mascheroni, $C = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0.57721\ldots$

Teorema (Fórmula Asintótica de Dirichlet)

Para todo $x \geq 1$, tenemos

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

donde C es la constante de Euler-Mascheroni,

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0.57721\ldots$$

Teorema

Para $x \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x \log x).$$