UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Enteros Algebraicos

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números

(Aula 29) 31.octubre.2023

Enteros Algebraicos

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

Números Algebraicos:

Definición

Un número complejo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *es un* ***número algebraico*** *si existe un polinomio o nulo* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que* $f(\mathbf{z}) = 0$.

Obs!: Todo número algebraico $\mathbf{z}$ satisface un único polinomio mónico e irreducible $g(x) = 0$, sobre $\mathbb{Q}$ (su polinomio minimal), y todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\mathbf{z}) = 0$ es divisible por $g(x)$. El **grado** de $\mathbf{z}$ es el grado de su polinomio minimal $g(x)$.

Definición

Un número algebraico $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *es un* ***entero algebraico*** *si satisface una ecuación polinomial* $f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$*, con coeficientes enteros.*

Enteros Algebraicos

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).
- De hecho, los números algebraicos forman un cuerpo, llamado el **cuerpo de número algebraicos** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.
- Los enteros algebraicos forman un anillo, el **anillo de enteros algebraicos** A, contenido dentro de $\mathcal{A}$.

Definición

*Un **cuerpo de números** K es cualquier cuerpo contenido en $\mathbb{C}$. El **anillo de enteros** de K, denotado $\mathcal{O}_K$, es la intersección $K \cap A$.*

Enteros Algebraicos

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Definición

*Un **cuerpo de números algebraicos** es cualquier cuerpo contenido en $\mathcal{A}$.*

La forma más común de construir cuerpos algebraicos de números es mediante extensiones de $\mathbb{Q}$. Esto es, dado un número algebraicos $\xi \notin \mathbb{Q}$, consideramos la **extensión** de $\mathbb{Q}$ por ξ

$$\mathbb{Q}(\xi) = \text{el menor cuerpo contenido en } \mathcal{A} \text{ que contiene a } \mathbb{Q} \text{ y a } \xi.$$

Para dar una expresión más adecuada para $\mathbb{Q}(\xi)$, nos limitamos a extensiones finitas, esto es, donde $\deg(\xi) = n$ (ξ satisface un polinomio de grado n en $\mathbb{Q}[x]$).

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. $\sqrt{3}$ es un número algebraico, pues satisface $x^2 - 3 = 0$. Además, $\deg(\sqrt{3}) = 2$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 2, de modo que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt{3} : \ a_0, a_1 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es la suma usual por componentes (se suman las partes reales, y se suman las partes imaginarias). El producto en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ funciona según la regla

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

Enteros Algebraicos

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$. Además, $\deg(\xi) = 3$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 3, y

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} + \xi\mathbb{Q} + \xi^2\mathbb{Q}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\xi)$ es la suma usual por componentes

$$(a + b\xi + c\xi^2) + (d + e\xi + f\xi^2) = (a + d) + (b + e)\xi + (c + f)\xi^2.$$

El producto en $\mathbb{Q}(\xi)$ funciona según la reglas

$$1 \cdot \xi = \xi, \qquad 1 \cdot \xi^2 = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi^2 = \xi^3 = 2, \qquad \xi^2 \cdot \xi^2 = \xi^4 = 2\xi.$$

En particular

$$(a + b\xi + c\xi^2)(d + e\xi + f\xi^2) = (ad + 2bf + 2ce) + (ae + bd + 2cf)\xi + (af + be + cd)\xi^2.$$

Cuerpos Cuadráticos

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi) = 2$, recordemos que ξ debe ser de la forma

$$\xi = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}, \qquad \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{Z},\ c \neq 0,\ m \neq 0, 1,\ m \text{ libre de cuadrados.}$$

  En particular,

$$\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}\Big(\frac{a + b\sqrt{m}}{c}\Big) = \mathbb{Q}(a + b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}).$$

- Si $m \neq n$, entonces $\mathbb{Q}(m) \neq \mathbb{Q}(n)$.

Cuerpos Cuadráticos

Tenemos una definición de norma en campos cuadráticos, muy importante para el desarrollo aritmético.

Definición

*La **norma** $N(\alpha)$ de un número $\alpha = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ se define como*

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - b^2 m \in \mathbb{Q}.$$

Propiedades

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces

- $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
- $N(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$.
- *Si $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ es un entero, entonces $N(\gamma) \in \mathbb{Z}$ es un entero racional.*
- $N(\gamma) = \pm 1 \iff \gamma$ *es una unidad en* $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$,
portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad. Para demostrar la recíproca, suponga que γ es una unidad. Entonces existe ε entero, tal que $\gamma = 1$. Esto implica $N(\gamma)N(\varepsilon) = N(1) = 1$, de modo que $N(\gamma) = \pm 1$, ya que $N(\gamma)$ y $N(\varepsilon)$ son números enteros racionales en $\mathbb{Z}$.

Cuerpos Cuadráticos

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$. ahora, como $N(\beta), N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, entonces alguno de ellos debe ser ± 1, de modo que β ó γ es una unidad en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Esto muestra que α es primo. $\square$

Teorema

Todo entero en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ no o ó unidad, se factora como producto de primos. $\square$

Cuerpos Cuadráticos

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

- Recordemos que cuando vale la propiedad de factoración única, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ se llama un dominio de factoración única (UFD).
  - todo cuerpo es UFD.
  - todo dominio Euclideano es UFD.
  - todo PID es UFD.

- **Teorema**: Los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, con $m = -1, -2, -3, -7, 2, 3$ son Euclideanos, portanto $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ es UFD.

- El Teorema de Stark-Heegner establece que si $m < 0$, entonces

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} \text{ es UFD } \; m \in \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}.$$

Cuerpos Cuadráticos

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 4; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \square$$

Ejemplos:

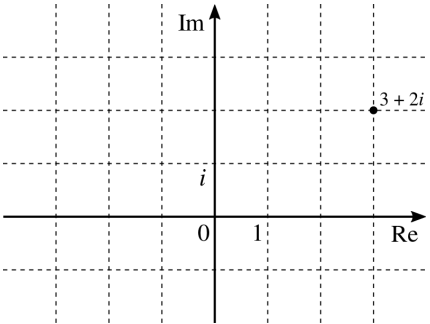
- Para $m = -1$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$ es igual a $\mathbb{Z}[i]$, **enteros Gaussianos**.
- Para $m = -3$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ es igual a $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, **enteros de Eisenstein**.

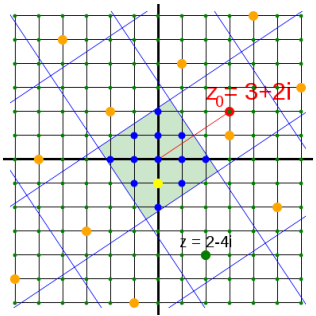
Enteros Gaussianos

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

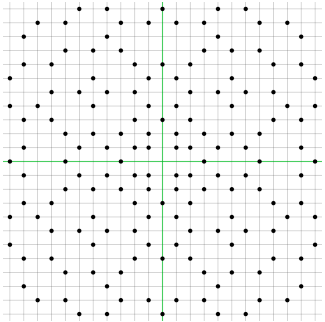
Propiedad

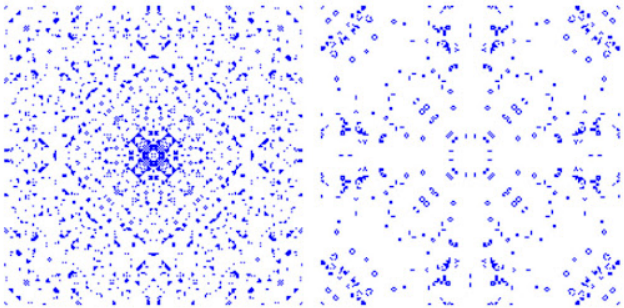
- $\mathbb{Z}[i]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale la identidad de Bézout.*





Enteros Gaussianos





Primos en el retículo de enteros Gaussianos.

Enteros Gaussianos

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos. La prueba que se presenta está tomada del libro de Paulo Ribenboim *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Teorema

La ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no posee soluciones en enteros gaussianos, con $xyz \neq 0$.

Corolario

La ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no posee soluciones enteras positivas no triviales.

Enteros Gaussianos

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:
   Existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon \cdot \lambda^{4n} \cdot \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2, \text{ con } n \geq 2.$$

2. En segundo lugar, se muestra que si (1) es verdadero, entonces hay otro conjunto de valores: $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon_1 \cdot \lambda^{4(n-1)} \cdot \alpha_1^4 + \beta_1^4 = \gamma_1^2.$$

3. Luego, repitiendo el paso (2) de forma consecutiva, finalmente llegamos a valores: $\alpha_i, \beta_i, \epsilon_i, \gamma_i$ tales que
   $$\epsilon_i \cdot \lambda^4 \cdot \alpha_i^4 + \beta_i^4 = \gamma_i^2.$$

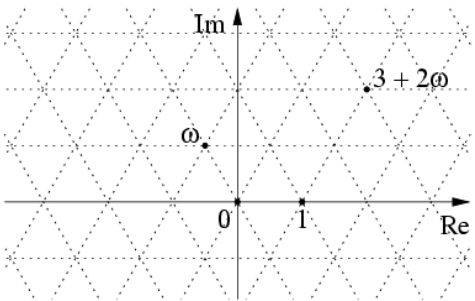
4. Esto contradice el paso (1), donde $n \geq 2$. Por lo tanto, no hay soluciones para FLT en el caso $n = 4$. $\square$

Enteros de Eisenstein

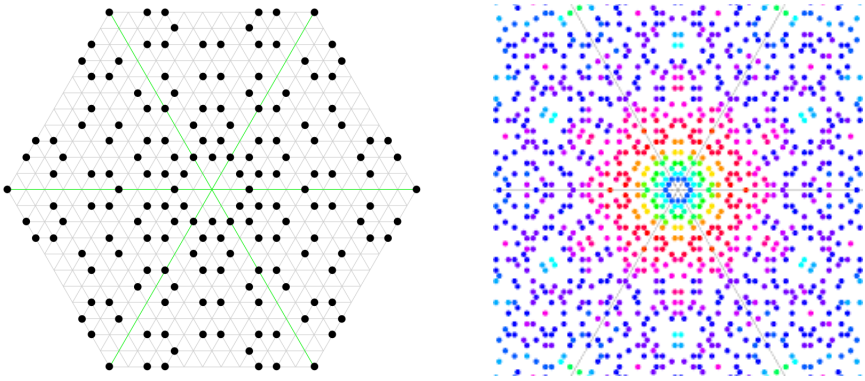
$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Propiedad

- $\mathbb{Z}[\zeta]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale el algoritmo de la división y la identidad de Bézout.*



Enteros de Eisenstein



Primos en el retículo de enteros de Eisenstein.

Enteros de Eisenstein

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 3$, usando los enteros de Eisenstein. La prueba que se presenta está tomada del libro de Paulo Ribenboim *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\zeta]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Teorema

La ecuación $x^3 + y^3 = z^3$ no posee soluciones en enteros de Eisenstein, con $xyz \neq 0$.

Enteros de Eisenstein

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números
$$\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2},$$
Entonces, $\zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{3}i$ es un primo de Eisenstein (pues $N(\zeta - \bar{\zeta}) = 3$), que divide a $\alpha\beta\gamma$.
5. Como $\alpha\beta\gamma \neq 0$, esto contradice el paso (3), y tenemos un método de descenso infinito. Por lo tanto, no hay soluciones para FLT en el caso $n = 3$. $\square$