

Teoría de Números 2022

Lista 04

25.agosto.2022

1. Resolver las congruencias

a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$,

b) $6x \equiv 15 \pmod{21}$,

c) $36x \equiv 8 \pmod{102}$,

2. Hallar todas las soluciones de la congruencia lineal $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$.

3. Resolver la congruencia $17x \equiv 3 \pmod{210}$.

4. Hallar el menor entero $a > 2$ tal que $2 \mid a$, $3 \mid a + 1$, $4 \mid a + 2$, $5 \mid a + 3$ y $6 \mid a + 4$.

5. Muestre que las congruencias

$$x \equiv a \pmod{n} \quad \text{y} \quad x \equiv b \pmod{m},$$

admiten una solución simultánea si, y sólo si, $(m, n) \mid a - b$.

Si una solución simultánea (x, y) existe, muestre que esta es única módulo $[m, n]$.

6. Probar que:

El sistema de congruencias lineales en 2 variables

$$ax + by \equiv r \pmod{n},$$

$$cx + dy \equiv s \pmod{n},$$

posee solución única módulo n si $(ad - bc, n) = 1$. La condición anterior es equivalente a requerir que la matriz del sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2 \times 2}$, tenga inversa también en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2 \times 2}$.

Usar este resultado para hallar todas las soluciones del sistema de congruencias

$$3x + 4y \equiv 5 \pmod{13},$$

$$2x + 5y \equiv 7 \pmod{13}.$$

7. Confirme que $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ es un número de Carmichael.

8. Implemente en Python el Test de primalidad de Fermat (utilice $k = 8$ repeticiones del test). (Agregar el código de la función que ejecuta el test, sólo de la función, en su tarea impresa. Esta función no debería ser mayor a 15 ó 20 líneas de código).

Luego, evaluar en su test si los siguientes números son primos o no:

1317, 2709, 3257, 3911, 4279, 5497, 6311, 7223, 8431, 9203.

Compare con una tabla de primos para indicar si su test da la respuesta correcta (aquí la respuesta correcta se entiende que en el caso de n ser primo, el test responde que n es probablemente primo).

Una tabla de primos puede encontrarse en <https://primes.utm.edu/lists/small/10000.txt>.
