Algoritmo de la División, MDC y MMC

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 03) 12.julio.2022

Algoritmo de la División

El siguiente resultado juega un papel muy importante en la teoría de números.

Teorema (Algoritmo de la División)

Para cualesquiera enteros $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, existe un único par (q, r) de enteros, tales que

$$b = qa + r, \quad y \quad 0 \leq r < a. \tag{1}$$

*En este caso, q es llamado **cociente** y r el **residuo** al dividir b entre a.*

Prueba: La prueba consiste de dos parte: la existencia y la unicidad. Para la existencia, mostramos que el conjunto

$$S = \{b - xa : x \in \mathbb{Z},\ b - xa \geq 0\},$$

es no vacío. Para ello, mostramos un valor de x para el cual $b - xa \geq 0$.

Algoritmo de la División

Como $a \geq 1$, entonces $|b|a \geq |b| \;\Rightarrow\; b - (-|b|)a = b + |b|a \geq b + |b| \geq 0$. Así, para $x = -|b|$, el entero $b - xa \in S$.

Aplicando el Principio de buen orden, entonces S posee un elemento mínimo r. En particular, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = b - qa \geq 0$. Mostramos $r < a$. Si este no fuera el caso, entonces $r \geq a$ y $b - (q+1)a = (b - qa) - a = r - a \geq 0$ sería un elemento de S. Pero $b - (q+1)a < b - qa = r$, lo que contradice la minimalidad de r. Por lo tanto, $r < a$, y hemos probado que existen $q, r \in \mathbb{Z}$, con la propiedad (1).

Para mostrar la unicidad, suponga que existen dos representaciones en la forma deseada

$$b = qa + r = q'a + r', \quad \text{con} \quad 0 \leq r < a,\ 0 \leq r' < a.$$

Entonces, $r' - r = (q - q')a$. En particular, $|r' - r| = |q - q'|\, a$.

Por otro lado, como $0 \leq r < a$ entonces $-a < -r \leq 0$. Sumándola con la otra desigualdad $0 \leq r' < a$, obtenemos que la diferencia de residuos satisface $-a < r' - r < a \;\Rightarrow\; |r' - r| < a$. Entonces

$$0 \leq |q - q'|\,a = |r' - r| < a \;\text{ implica que }\; 0 \leq |q - q'| < 1.$$

Siendo q, q' ambos enteros, entonces $q - q'$ es también un entero. La desigualdad $0 \leq |q - q'| < 1$ implica que la única posibilidad es que $q - q' = 0 \;\Rightarrow\; q' = q$. De ahí que $r' - r = (q - q')a = 0 \cdot a = 0$ y $r' = r$. Esto muestra la unicidad de la representación. $\square$

Algoritmo de la División

Una versión más general del algoritmo es la siguiente:

Corolario (Algoritmo de la División)

Para cualesquiera enteros $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, existe un único par (q, r) de enteros, tales que

$$b = qa + r, \quad y \quad 0 \leq r < |a|. \tag{2}$$

Prueba: Basta considerar el caso $a < 0$. Entonces $|a| > 0$ y el algoritmos de la división en (1) establece que existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $b = q|a| + r$, con $0 \leq r < |a|$.
Como $a < 0$, entonces $b = q|a| + r = (-q)a + r$, $0 \leq r < |a|$ satisface (2). $\square$

Ejemplo: Para ilustrar el algoritmo de la división, tome $a = 13$, $b = 61$.

Algoritmo de la División

Tenemos que
$$61 = 4 \cdot 13 + 9, \quad \text{con} \quad 0 \leq 9 < 13.$$
Observe que el algoritmo de la división equivale a hacer la "división tradicional" de $\frac{61}{13}$ a mano: $q = 4$ resulta el cociente, y 9 resulta ser el residual.

Esto también equivale a hacer $\frac{61}{13} = 4 + \frac{9}{13}$: pues
$$b = qa + r \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}.$$
Ejemplo: Para ilustrar el algoritmo con $a < 0$, tomemos $a = -7$:

- Con $b = 1$: $1 = (0)(-7) + 1 \;\Rightarrow\; q = 0, r = 1$.
- Con $b = -2$: $-2 = 1(-7) + 5 \;\Rightarrow\; q = 1, r = 5$.
- Con $b = 60$: $60 = (-8)(-7) + 4 \;\Rightarrow\; q = -8, r = 4$.
- Con $b = -60$: $-60 = 9(-7) + 3 \;\Rightarrow\; q = 9, r = 3$.

Algoritmo de la División

Ejemplo: Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Probar que $3^{2^n} + 1$ es divisible por 2, pero no por 4.

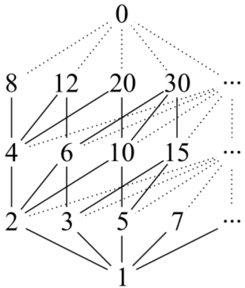
Solución: 3^{2^n} es impar y $3^{2^n} + 1$ es par. Observe que
$3^{2^n} = \left(3^2\right)^{2^{n-1}} = 9^{2^{n-1}} = (8+1)^{2^{n-1}}$.

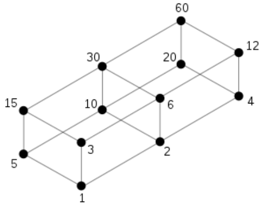
Por el Teorema del Binomio, tenemos

$$(x+y)^m = x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}y + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}xy^{m-1} + y^m.$$

En particular, para $x = 8$, $y = 1$ y $m = 2^{n-1}$, cada sumando de lado derecho de la ecuación anterior, excepto el último término $y^m = 1$, es un múltiplo de 8, en particular, múltiplo de 4. Luego $3^{2^n} = 4q + 1$, $q \in \mathbb{Z}$.

De ahí, el residuo de $3^{2^n} + 1 = 4q + 2$ y el residuo de $3^{2^n} + 1$ al dividirlo entre 4 es 2, lo que muestra que no es múltiplo de 4.





Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, a cada uno les podemos asociar su conjunto de divisores no-negativos D_a y D_b respectivamente.

Por la propiedad de limitación, estos conjuntos son finitos, y su intersección $D_a \cap D_b$ es finita. Luego, $D_a \cap D_b$ posee un elemento máximo, llamado el *máximo divisor común* (MDC) de a y b.

De forma similar, los conjuntos de los M_a y M_b de múltiplos no-negativos de a y de b, respectivamente. Ahora $M_a \cap M_b$ es no vacío y limitado inferiormente por 0. Este conjunto posee un elemento mínimo, llamado el *mínimo múltiplo común* (MMC) de a y b.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

*Dados $a, b \in \mathbb{N}$, un **máximo divisor común (MDC)** de a y b es un entero positivo d que satisface*

1. $d \mid a$ y $d \mid b$,
2. $k \mid d$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \mid a$ y $k \mid b$.

*Similarmente, un **mínimo múltiplo común (MMC)** de a y b es un entero positivo m que satisface*

1. $a \mid m$ y $b \mid m$,
2. $m \mid k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $a \mid k$ y $b \mid k$.

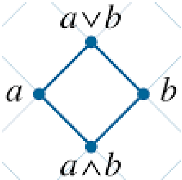
De las definiciones anteriores, se sigue que el MDC y el MMC son únicos:

<u>Prueba</u>: Sean d_1 y d_2 dos MDC para a y b. Entonces $d_1 \mid a$, $d_1 \mid b$, $d_2 \mid a$, $2 \mid b$.
Como d_1 es MDC de a y b, y $d_2 \mid a$, $d_2 \mid b \;\Rightarrow\; d_1 \mid d_2$.
Como d_2 es MDC de a y b, y $d_1 \mid a$, $d_1 \mid b \;\Rightarrow\; d_2 \mid d_1$.
Entonces $|d_1| = |d_2|$, pero siendo d_1, d_2 no negativos, se concluye que $d_1 = d_2$.
La prueba es similar en el caso del MMC.

Notación. Como son únicos, denotamos por $d = (a,b)$ y por $m = [a,b]$ al MDC y MMC de a y b, respectivamente.

Otra forma de entender a $d = (a,b)$ y $m = [a,b]$ es que son el **ínfimo** y el **supremo**, respectivamente, de a y b, en la relación de divisibilidad $\mid$:

$$d = (a,b) = a \wedge b, \qquad m = [a,b] = a \vee b.$$



MDC y MMC

Ejemplo: Calcular el MDC y MMC de 360 y 84.
Solución: Factoramos los números 360 y 84 (en factores primos):

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Los divisores coumnes para 360 y 84 son $2, 2, 3$. Entonces $(360, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Por otro lado, $[360, 84] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Propiedades (Propiedades MDC y MMC)

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Entonces*

1. $(a, b) = a \;\Leftrightarrow\; [a, b] = b \;\Leftrightarrow\; a \mid b$.
2. $(ca, cb) = c(a, b)$ *y* $[ca, cb] = c[a, b]$.
3. $(a, b) = (b, a)$ *y* $[a, b] = [b, a]$.
4. $((a, b), c) = (a, (b, c))$ *y* $[[a, b], c] = [a, [b, c]]$.
5. $[(a, c), (b, c)] = ([a, b], c)$.
6. $([a, c], [b, c]) = [(a, b), c]$.
7. $(a, b)[a, b] = ab$.

Prueba: 1 a 6, Ejercicio!