255,

Seminario de Matemática Aplicada

Los tres mosqueteros al servicio de su majestad, la Teoría de Números

Lorena Beltrán
18629

Noviembre 2021

Contenido

Contexto

Siglo XVIII

El *Siglo de las Luces* fue la cuna de la ciencia moderna

Junto a la Revolución Industrial surgieron las primeras escuelas de ingeniería en el mundo y una perspectiva más práctica de lo que había sido la matemática con anterioridad.

Simultáneamente discípulos de grandes maestros como Leibniz y Newton, se dedicaron a la resolución de problemas de física, ingeniería y/o astronomía, lo que resultó en la delimitación de nuevas subdisciplinas de la matemática.

Los nuevos rostros de la matemática

Joseph-Louis Lagrange(1736 - 1813)

- Nacido en Turín en una familia adinerada originaria de París
- Se involucró en matemática luego de conocer el trabajo de Edmund Halley sobre análisis
- Euler lo recomendó a la academia de Berlín

Joseph-Louis Lagrange

Teorema de Lagrange

Todo entero positivo puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados de números enteros

The Mécanique Analytique

Publicación de la obra de Lagrange

Adrien-Marie Legendre(1752 - 1833)

- Originario de París y nacido en una familia adinerada.
- Recibió su educación en el Collège Mazarin en París, 1770.
- Profesor de matemáticas de la Escuela Militar de París y profesor de la École Normale desde 1795.
- Miembro la comisión internacional encargada de verificar todos los trabajos implicados en la decisión de adoptar el sistema métrico.
- En 1789 fue elegido Miembro de la Royal Society.

Conjetura de Legendre (*Landau)*

Siempre existe un número primo entre n^2 y $(n+1)^2$

$$x^2 \equiv p(\mathrm{mod}\, q)$$
$$y^2 \equiv q(\mathrm{mod}, p)$$

Teorema Aureo - Ley de Reciprocidad cuadrática

Si ninguno de los primos p o q pertenece a la sucesión $4k+1$ entonces una de las congruencias tiene solución si y sólo si la otra no tiene solución. Si alguno de los primos pertenece a la sucesión $4k+1$ entonces o bien ambas congruencias tienen solución o bien ninguna de las dos tiene solución.

Christian Goldbach(1690 - 1764)

- Nacido en Prusia en un una familia religiosa
- Tuvo diversos estudios, entre ellos idiomas, matemáticas y leyes
- Trabajó en varias universidades de Europa como investigador y profesor

Christian Golbach

Conjetura de Goldbach

- Cualquier entero que puede ser escrito como la suma de dos primos también puede ser escrito como la suma de cuantos números primos se desee hasta que los términos sean unidades.
- Todo entero positivo mayor a dos puede ser escrito como la suma de 3 números primos
- Todo entero positivo puede escribirse como la suma de 2 primos

Conjeturas en tiempos modernos

Conjetura débil de Goldbach

Todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos.

Conjetura de Goldbach

Todo número par mayor a 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

¿Conjetura resuelta?

Función de Von Mangoldt

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{para algún primo } p \text{ y un entero } k \geq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Su sumatoria, también se conoce como *la función de Chebyshev*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

- Satisface la identidad

$$\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

[1]

[1] La suma considera todos los enteros d que dividen a n

Teorema de Vinogradov

Sea A un número real positivo, entonces

$$r(N) = \frac{1}{2}G(N)N^2 + O(N^2\log^{-A}N)$$

donde

$$r(N) = \sum_{k_1+k_2+k_3=N} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3)$$

para Λ función de von Mangoldt y

$$G(N) = \left(\prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)\left(\prod_{p|N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\right)$$

¿El cielo es el límite?

~ 1930	**K Borozkin** $e^{e^{16{,}038}} \approx 3^{3^{15}}$
1989	**Wang y Chen** $10^{43{,}000}$
1997	**Deshouillers, Effinger, Te Riele y Zinoviev** Demuestran que la hipótesis generalizada de Riemman implica la conjetura débil de Golbach
2012	**Terence Tao** Demuestra que $2n \geq 4$ puede expresarse como la suma de 7 primos y que para $2n+1 \geq 5$ puede expresarse como la suma de 5 primos

D’Artagnan

Intensión

Demostrar que el comportamiento asintótico de una sucesión

$$a_n \sim F(n)$$

para alguna función

Para esto se calculan los residuos particionando el círculo unitario en arcos mayores y menores[2] para luego determinar el comportamiento de estos últimos. Lo relevante de los arcos menores es que en muchas ocasiones las singularidades coinciden con las raíces de la unidad y su interpretación es el orden de la sucesión de Farey[3].

---

[2] estos arcos contienen singularidades importantes

[3] sucesión de fracciones irreducibles entre 0 y 1 con un denominador menor o igual a n en orden creciente

Herald Helfgott(1977)

- Lima, Perú
- Presenta una prueba de 79 páginas en junio de 2013
- Es investigador en el Centre National de la Recherche Scientifique

Referencias

[1] **Cayanan.M(2019). The circle method applied to Goldbach's Weak Conjecture**

[2] **Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle (Band 1), St.-Pétersbourg 1843, pp. 125–129**

[3] **LeVeque, William J. (2002) [1956]. Topics in Number Theory, Volumes I and II. New York: Dover Publications. p. 42. ISBN 978-0-486-42539-9. Zbl 1009.11001.**

[4] **Theorem of the Week (2009).Theorem 3: Vinogradov's There Primes Theorem. Recuperado de** `https://theoremoftheweek.wordpress.com/2009/08/10/theorem-3-vinogradovs-three-primes-theorem/`

[5] **Vinogradov, Ivan Matveevich (1954). The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Translated, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport. London and New York: Interscience. MR 0062183**