# Leonardo de Pisa: el matemático de la Edad Media

Karina Alejandra Valladares Díaz

Guatemala, noviembre 23 de 2021

# Índice

# 01

# Los estudios de Fibonacci

Su paseo por la academia y su instrucción por Constantinopla

# El viajero, *Fibonacci*

Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1240).

- Llamado Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo Pisano (Leonardo el viajero de Pisa) o simplemente Fibonacci
- De niño Leonardo viajó con su padre al norte de África para ayudarle, y fue allí donde aprendió el sistema de numeración árabe.
- Dado que había notado la superioridad de los numerales árabes, Fibonacci viajó a través de los países del Mediterráneo para estudiar con los matemáticos más destacados de ese tiempo.
- Se dice que volvió a Pisa (Italia) cerca del 1200.
- Escribió varios importantes textos que jugaron un papel importante para revivir antiguas habilidades matemáticas e hizo significativas contribuciones propias.

- El emperador del Sacro Imperio Romano era Federico II, quien supo de la obra de Fibonacci gracias a eruditos de su corte que mantenían correspondencia con él desde su regreso a Pisa.
- Entre estos sabios se hallaba Miguel Escoto, filósofo, médico, alquimista y astrólogo; Teodoro de Antioquía, el filósofo de la corte y Dominicus Hispanus, quien fue el que le sugirió a Federico que conociese a Fibonacci, en ocasión de la reunión de la corte de Federico en Pisa alrededor de 1225.
- Johannes de Palermo, otro miembro de la corte de Federico II, presentó varios problemas y desafíos al gran matemático Fibonacci. Tres de estos problemas fueron resueltos por Fibonacci y dio soluciones en correspondencia que envió a Federico II.

Felipe II, Emperador del Sacro Imperio Romano Germánico.

02

# Aportes a la matemática

Producción literaria de Fibonacci
y sus libros publicados.

Fibonacci escribió un número de importantes textos que tomaron un papel principal en el despertar de las antiguas habilidades matemáticas, así como realizó significativas contribuciones propias. Dado que vivió en los días anteriores a la imprenta, sus libros fueron manuscritos y la única forma de reproducirlos era con la elaboración manual de copias manuscritas. Se conservan cinco de las obras escritas, cuya lista se incluye en el *Libro de los números cuadrados:*

- *Liber Abaci* (*Libro del cálculo*, o incorrectamente, *Libro del ábaco*)
- *Practica Geometriae (Geometría práctica)*
- *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometricam pertinentium. (Ramillete de soluciones de ciertas cuestiones relativas al número y a la geometría)*
- *Carta a Teodoro*
- *Liber Quadratorum. (El Libro de los números cuadrados)*

Una página del Liber Abaci de la Biblioteca Nacional Central de Florencia

# *Liber Quadratorum (El libro de los números cuadrados)*

- Fue publicado en 1225 y es el más famoso de todos. Surgió de un desafío planteado por Teodoro de Antioquía, que le propuso encontrar un cuadrado tal que si se le sumaba o restaba el número cinco, este diera como resultado en ambos casos un número cuadrado.
- Fibonacci parte de los rudimentos que se conocían de la Antigua Grecia acerca de los cuadrados y va construyendo una teoría, resolviendo proposiciones, hasta lograr darle solución al problema de análisis indeterminado planteado como desafío.
- En la obra original se introducen unos números llamados *congruentes*, que se definen como
- $c = m \times n\,(m^2 - n^2)$, donde $m,n$ son enteros positivos impares con $m > n$.
- Enuncia y muestra que el producto de un número congruente por un cuadrado es otro número congruente.
- Utiliza estos números como herramientas para sus posteriores proposiciones y los hace intervenir en una identidad que es conocida como *identidad de Fibonacci*

$$\frac{1}{2}(m^2 + n^2) \pm mn(m^2 - n^2) = \left[\frac{1}{2}(m^2 - n^2) \pm mn\right]^2$$

# *Liber Abaci (Libro del cálculo)*

El título tiene dos traducciones comunes, *El libro del ábaco* o *El libro del cálculo,* aunque se dice que la primera traducción es incorrecta.

Fue escrito en 1202 y revisado y considerablemente aumentado en 1228.

Está comprendido por quince capítulos.

Entre los capítulos sobresalientes está el dedicado a las fracciones graduales, de las que expone las propiedades. En ellas basa una teoría de los números fraccionarios y, después de haberlas introducido en los cálculos de números abstractos, las vuelve un instrumento práctico para la obtención de números concretos.

Todas las fracciones se presentan a la manera egipcia, es decir, como suma de fracciones con numeradores unitarios y denominadores no repetidos. La única excepción es la fracción 2/3

Incluye una tabla para descomposición en fracciones unitarias que se lee derecha a izquierda, como en las lenguas semíticas.

# Secciones en el *Liber Abaci*

- La primera sección introduce el sistema de numeración indoarábigo, incluyendo métodos de conversión entre sistemas de representación diferentes.
  - Esta sección incluye la primera descripción del método *división por tentativa* para comprobar si es un número primo o compuesto
- La segunda sección incluye un compendio de ejemplos de comercio, como conversiones de moneda y medidas, cálculos de beneficio o cálculos de interés
- La siguiente sección incluye la discusión de una serie de problemas matemáticos. Entre los más conocidos, se incluye:
  - Una discusión sobre el teorema chino del residuo
  - Números perfectos (los enteros positivos que son iguales a la suma de sus divisores propios)
  - Los primos de Mersenne ($M_n = 2^n - 1$)
  - Fórmulas para progresiones aritméticas
  - Descripción sobre el crecimiento de una población de conejos, conocido ahora como la sucesión de Fibonacci
- La última sección estudia aproximaciones, tanto numéricas como geométricas, de números irracionales del tipo de las raíces cuadradas.

# 03

# La sucesión de Fibonacci

Avances realizados durante la época de la caída del Imperio Romano en otras partes del mundo

# Sucesión de Fibonacci

- La sucesión de Fibonacci surge a raíz de un problema propuesto, sobre la reproducción de conejos. Aparece en 1202, en donde se señala que la población está dada por

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\ldots.$$

- En donde la sucesión puede definirse recurrentemente como

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

- Muchas propiedades de la sucesión de Fibonacci fueron descubiertas por Lucas, responsable de haberla denominado como se la conoce en la actualidad. Incluso llegó a encontrar una formula cerrada para el n-ésimo término

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Los números de Lucas están dados de forma similar a Fibonacci, siendo

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

Y la relación con Fibonacci está dada por

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Existiendo también una fórmula cuadrática para relacionarlos,

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

De forma que todas las soluciones en enteros positivos de

$$x^2 - 5y^2 = 4 \; ; \quad x^2 - 5y^2 = -4$$

están dadas por $(x, y) = (L_{2n}, F_{2n}), n \geq 1$ y $(x, y) = (L_{2n-1}, F_{2n-1}), n \geq 1$, respectivamente (nótese que ambas son ecuaciones diofánticas).

# Propiedades aritméticas

Sea $1 \leq m \leq n$. Entonces:

- $F_m | F_n \ ssi \ m|n$
- $L_m | L_n \ ssi \ m|n \ \ y \ \ \frac{n}{m}$ es un entero impar
- Los números de Fibonacci que tienen un índice primo $p$ no comparten ningún divisor común mayor que 1 con los números de Fibonacci anteriores, debido a la identidad

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$$

- Sea $\mathrm{d} = \gcd(\mathrm{m}, \mathrm{n})$, entonces

$$\gcd(F_m, L_n) = \begin{cases} L_d \ \ si \ \ m/d \ \ es\ par \\ 2, si\ m/d \ \ es\ impar\ y\ 3|d \\ 1, en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

# Cuadrados y potencias

Sea $\alpha$ un entero distinto de cero que es un cuadrado, o el conjunto de dichos números. Cohn y Wyler probaron de forma independiente que

$\{n \geq 1 \mid F_n = \alpha\} = \{1,2,12\}$, puesto que $F_1 = F_2 = 1; F_{12} = 144$

Dicho resultado es relevante al interpretarlo a la luz de ciertas ecuaciones diofantinas. En particular, sea $A > 2$ un entero libre de cuadrados, entonces cada una de las ecuaciones

$$x^2 - 5A^2y^4 = \pm 4$$

tiene a lo sumo una solución en los enteros positivos, donde $F_n = Ay^2$ y $x = L_n$. De forma similar, cada una de las ecuaciones

$A^2x^4 - 5y^2 = \pm 4$

Tiene a lo sumo una solución en donde $L_n = Ax^2$ y $F_n = y$.

En realidad, existen propiedades interesantes también en el caso en el que los números de Fibonacci (o de Lucas) son potencias cúbicas. Varios autores probaron, de forma independiente, las siguientes propiedades:

- $F_n$ es un cubo si y solo si $n = 1,6$
- $L_n$ es un cubo si y solo si $n = 1$

De hecho, nunca se ha encontrado un número de Fibonacci o de Lucas de la forma $a^k,\ a > 1\ y\ k \geq 5$. Se ha probado que la ecuación $x^2 - 5y^{10} = \pm 4$ no tiene soluciones en los enteros, con $y > 1$, lo que implica que $F_n$ nunca es una potencia de grado 5 diferente de 1.

Además, se puebe probar que, dado un entero libre de cuadrados $A \geq 1$ , existe un $N > 1$ que es computable y si es tal que $F_n = Ax^k$, con $k > 2$, entonces $n, k \leq N$.

# 04

# Representación alternativa

Fórmula generadora para
la sucesión de Fibonacci

# Función generadora

Una función generadora para cualquier sucesión es la función

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

para la cual los coeficientes $a_i$ son los términos de la sucesión. Para Fibonacci, la función es

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Si hacemos $r = x - x^2$, la función se transforma en

$$f(x) = \frac{x}{1 - r} = x\left(\frac{1}{1 - r}\right)$$

Sustituyendo, sabemos que si $|r| < 1$, la sucesión está dada por

$$f(x) = x(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots)$$

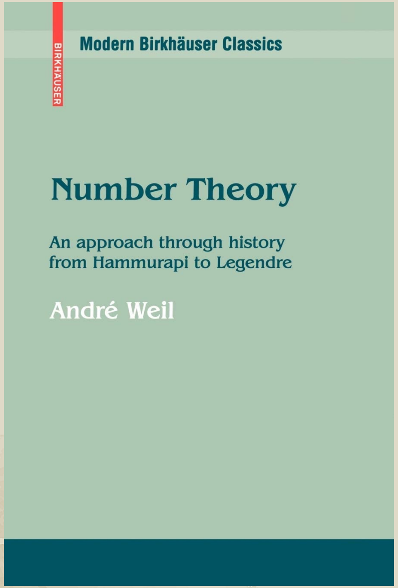
Regresando todo en términos de $x$,

$$f(x) = x(1 + (x - x^2) + (x - x^2)^2 + (x - x^2)^3 + \cdots$$

Que equivale a

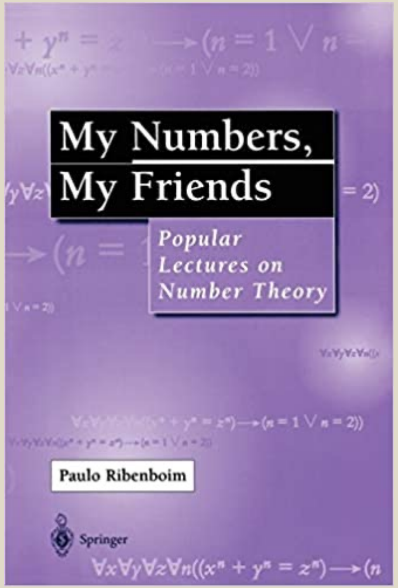
$$f(x) = 0x^0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^7 + \cdots$$

# Referencias recomendadas





Weil, (1984). *Number Theory: an Approach Through History – from Hammurapi to Legendre.*



Ribenboim, P. (2000). *My Numbers, My Friends. Popular lectures on Number Theory.*

# ¡Gracias por su atención!

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, infographics & images by **Freepik**