Teoría de Números 2021

Lista 04

31.agosto.2021

1. Resolver las congruencias
   a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$.
   b) $6x \equiv 15 \pmod{21}$.
   c) $36x \equiv 8 \pmod{102}$.

2. Hallar todas las soluciones de la congruencia lineal $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$.

3. Resolver la congruencia $17x \equiv 3 \pmod{210}$.

4. Hallar el menor entero $a > 2$ tal que $2 \mid a$, $3 \mid a+1$, $4 \mid a+2$, $5 \mid a+3$ y $6 \mid a+4$.

5. Muestre que las congruencias
   $$x \equiv a \pmod{n}, \quad \text{y} \quad x \equiv b \pmod{m},$$
   admiten una solución simultánea si, y sólo si, $(m, n) \mid a - b$.
   Si una solución simultánea x existe, muestre que esta es única módulo $[m, n]$.

6. Muestre el Teorema 4.9 (libro de Burton):

   Teorema: El sistema de congruencias lineales en 2 variables
   $$\begin{aligned} ax + by &\equiv r \pmod{n}, \\ cx + dy &\equiv s \pmod{n}, \end{aligned}$$
   posee solución única módulo n si $(ad - bc, n) = 1$.

   La condición anterior es equivalente a requerir que la matriz del sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2\times 2}$, tenga inversa también en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2\times 2}$.

   Use este resultado para hallar todas las soluciones del sistema de congruencias
   $$\begin{aligned} 3x + 4y &\equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x + 5y &\equiv 7 \pmod{13}. \end{aligned}$$

7. Sea r una raíz primitiva módulo n. Muestre que r^k es también raíz primitiva módulo n si y sólo si, $(k, \varphi(n)) = 1$.

8. Hallar todas las raíces primitivas módulo 41 y módulo 82.

9. (No entregar)
   Asuma que r es una raíz primitiva módulo p, con p primo impar, y que $(r + tp)^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Muestre que $r + tp$ es una raíz primitiva módulo p^k, para todo $k \geq 1$.