Teoría de Números 2021

Lista 03

13.agosto.2021

1. a) Dar un ejemplo para mostrar que $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ no necesaraimente implica que $a \equiv b \pmod{n}$.
   b) Si $a \equiv b \pmod{n}$, probar que $(a, n) = (b, n)$.

2. Compruebe que $53^{103} + 103^{53}$ es divisible por 39, y que $111^{333} + 333^{111}$ es divisible por 7.

3. Asumiendo que $495 \mid 273x49y5$, encontrar los dígitos x y y.

4. Si p y q son primos distintos, muestre que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

5. Use el Teorema de Wilson para mostrar que para cualquier primo impar p, vale

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}.$$

   Mostrar que

$$\Big((\frac{p-1}{2})! \Big)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}.$$

6. Pruebe que para todo $n > 2$, se cumple que $\displaystyle\sum_{(k,n)=1,\, 1 \leq k \leq n} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

7. a) Construya un criterio de divisibilidad entre 59.
   b) Utilice el criterio anterior para verificar si los números 45843, 19641 y 32763 son divisibles entre 59.

8. Confirme que $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ es un número de Carmichael.

9. Implemente en Python el Test de primalidad de Fermat (utilice $k = 5$ repeticiones del test).
   (Agregar el código de la función que ejecuta el test, sólo de la función, en su tarea impresa. Esta función no debería ser mayor a 15 líneas de código.

   Luego, evalúe en su test si los siguientes números son primos o no:

$$1317, 2709, 3257, 3911, 4279, 5497, 6311, 7223, 8431, 9203.$$

   Compare con una tabla de primos para indicar si su test da la respuesta correcta (aquí la respuesta correcta se entiende que en el caso de n ser primo, el test responde que n es probablemente primo).
   Una tabla de primos puede encontrarse en `https://primes.utm.edu/lists/small/10000.txt`.