Teoría de Números 2021

Lista 01

09.julio.2021

1. Muestre que el cubo de cualquier entero puede escribirse como diferencia de dos cuadrados. (Sugerencia: observe que $n^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$.)

2. Si la secuencia de números a_n está definida por $a_1 = 11$, $a_2 = 21$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para todo $n \geq 3$, pruebe que

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1, \quad \forall n \geq 1.$$

3. **Conjetura de Collatz.** Considere la función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2}, & n \text{ impar;} \\ \\ \frac{n}{2}, & n \text{ par.} \end{cases}$$

La Conjetura de Collatz establece que, comenzando de cualquier número entero $n > 1$, la secuencia de iterados de f

$$f(n),\ f^2(n) = f(f(n)),\ f^3(n) = f(f(f(n))),\ \ldots$$

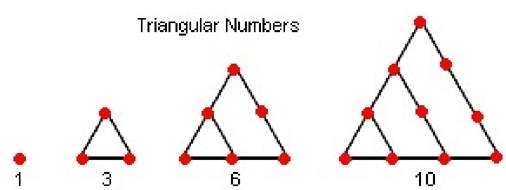
eventualmente alcanza el valor 1, (y por consiguiente se vuelve periódica alternando valores entre 1 y 2). Este hecho ha sido verificado para todo entero $1 < n < 10^{16}$.
Confirme que la conjetura es cierta para los casos $n = 21$ y $n = 23$.

4. Para $n \geq 1$, verificar que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$.

5. **Números Triangulares.** Cada uno de los números

$$1 = 1,\ 3 = 1 + 2,\ 6 = 1 + 2 + 3,\ 10 = 1 + 2 + 3 + 4,\ \ldots$$

representa el númro de puntos que se pueden configurar en triángulos equiláteros



Esto llevó a los griegos a llamar a un número T_n *triangular* si es igual a la suma de enteros consecutivos, comenzando de 1. Esto es

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Compruebe las siguientes afirmaciones relacionadas con números triangulares.

a) Un número es triangular si, y sólo si, es de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$, para algún $n \geq 1$. (Pitágoras, *circa* 550 B.C.)
b) El entero n es un número triangular si, y sólo si, $8n + 1$ es un cuadrado perfecto. (Plutarco, *circa* 100 A.D.)
c) La suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto. (Nicómano, *circa* 100 A.D.)

d) Si n es un número triangular, también lo son $9n+1$, $25n+3$, y $49n+6$. (Euler, 1775)

6. Pruebe que la suma de los recíprocos de los primeros n números triangulares es menor que 2; esto es

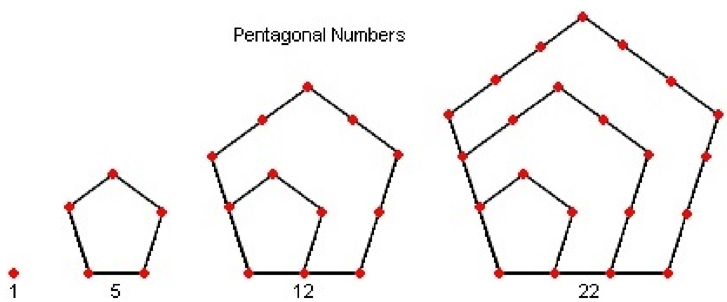
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{T_n} < 2, \quad \forall n \geq 1.$$

(Sugerencia: Observe que $\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.)

7. **Números Pentagonales.** Cada uno de los números

$$1,\ 5 = 1+4,\ 12 = 1+4+7,\ 22 = 1+4+7+10,\ \ldots$$

representa el número de puntos que pueden configurarse sobre un pentágono



Los antiguos griegos llamaron a éstos *números pentagonales*. Si p_n denota el n-ésimo número pentagonal, donde $p_1 = 1$ y $p_n = p_{n-1} + (3n-2)$ para $n \geq 2$; pruebe que

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

8. Para $n \geq 2$, verifique las siguientes relaciones entre números pentagonales, cuadrados, y números triangulares:

a) $p_n = t_{n-l} + n^2$.

b) $p_n = 3t_{n-l} + n = 2t_{n-1} + t_n$.