Guillermo Grabinsky nació en la Ciudad de México. Estudió la licenciatura en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y la maestría y doctorado en matemáticas en la Universidad de California en Berkeley.

Ha sido por muchos años profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias, donde ha dirigido un gran número de tesis de licenciatura en temas de análisis matemático, variable compleja y teoría ergódica.

Sus áreas de interés son la teoría de la medida y el análisis matemático clásico.

Desde hace 20 años es profesor de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM).

Guillermo Grabinsky

TEORÍA DE LA MEDIDA

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
2013

Grabinsky, Guillermo
Teoría de la medida / Guillermo Grabinsky. - 2º reimpresión. -
México : UNAM, Facultad de Ciencias, 2013.
vii, 214 p. ; 22 cm. - (Temas de matemáticas)

Incluye índice
Bibliografía: páginas 161-163
ISBN 978-607-02-1041-9

1. Teoría de la medida Estudio y enseñanza (Superior). 2. Funciones algebraicas Problemas, ejercicios, etc. I. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. II. Título. III. Serie.

515.42-scdd21 Biblioteca Nacional de México

Teoría de la medida
1ª edición, 9 de noviembre de 2000
1ª reimpresión, 2011
2ª reimpresión, 2013

Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. Delegación Coyoacán,
C. P. 04510, México, Distrito Federal.
editoriales@ciencias.unam.mx

ISBN: 978-607-02-1041-9

Diseño de portada: Laura Uribe Hernández

Impreso y hecho en México.

A Becky,
a Jackie,
a Lisa,
por orden
de aparición.

Contenido

Introducción

El siguiente texto surge del material preparado para un curso semestral sobre Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue y está dirigido a estudiantes del tercer año de la carrera de Matemáticas por lo que se supone que el lector ha llevado un curso de Análisis Real y ha adquirido un manejo ágil de conjuntos, clases de conjuntos, funciones entre ellos, así como de las nociones topológicas básicas (abiertos, compactos y continuidad entre otros y de cardinalidad de conjuntos), asimismo sería deseable algún conocimiento sobre convergencia de sucesiones de funciones.

La exposición de los temas ha sido escrita usando un enfoque general y es sólo hasta el capítulo ocho en el que se aborda la construcción de la medida de Lebesgue para los reales. La experiencia me ha mostrado que éste es un orden conveniente para la presentación de los temas y en el descenso hacia los reales se gana considerablemente en perspectiva, lo mismo puede decirse de la integral para funciones de variable real. Como dividendo adicional el camino hacia áreas más avanzadas del Análisis Matemático y la Teoría de la Probabilidad queda abierto.

El libro incluye 150 ejercicios que ilustran y desarrollan la teoría expuesta los cuales deben considerarse como parte fundamental del curso pues en algunos se discuten con detalle ejemplos importantes, en otros se pide al lector que complete la prueba de algún teorema o bien que desarrolle otra diferente y otros contienen resultados adicionales de interés. Es importante señalar que existe cierta interdependencia entre los ejercicios por lo que sería conveniente que éstos se resolvieran en orden.

La gran mayoría de los ejercicios se acompañan de sugerencias las cuales tienen por objeto agilizar su solución y permitir que el lector avance más rapidamente y de este modo pueda cubrir la mayor cantidad de ellos. Las sugerencias pueden no ser atendidas ya que casi siempre hay más de un camino hacia la solución y otros métodos son posibles y desde luego deseables. Hago notar que a lo largo del texto se pide al lector que verifique afirmaciones de carácter rutinario las cuales no fueron incluidas en la lista final de ejercicios pero que deben tomarse en cuenta.

La bibliografía incluye textos considerados como clásicos en el área así como algunos artículos que me parecen interesantes. Aunque este texto es autocontenido invito al lector a que los consulte.

Es un grato deber reconocer mi deuda hacia aquéllos de quienes aprendí medida e integración ya sea a través de cursos, libros, artículos y durante la impartición de la materia a muchas generaciones de excelentes alumnos.

Finalmente agradezco especialmente a la M. en C. Ana Irene Ramírez G. su interés y gentil insistencia para darle nueva vida a mis notas, y a Zdenek Palecek y Rafael Reyes por su asistencia en la transcripción en LaTeXde las mismas.

Otoño del 2009

Glosario de símbolos

$\mathcal{A}$	Álgebra de subconjuntos de un conjunto dado X, página 5
$\mathcal{A}(\mathbb{E})$	Álgebra generada por la familia $\mathbb{E}$, página 8
$\mathcal{A}^*$	σ-álgebra de los μ^*-medibles, página 87
$\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$	σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$, página 95
$\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$	σ-álgebra de subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, página 10
$\mathcal{C}$	Un π-sistema, página 12
c.d. rel. μ	Casi dondequiera relativo a una medida μ, página 37
Δ	Diferencia simétrica, página 5
$\mathcal{F}_\sigma$	Clase de conjuntos que son unión numerable de cerrados, página 11
$\mathcal{G}_\delta$	Clase de conjuntos que son intersección numerable de abiertos, página 11
$\mathcal{L}$	Un lambda-sistema, página 12
$\mathcal{L}_1(X, S, \mu)$	El espacio de funciones integrables con respecto a μ, página 57
$\mathcal{L}_p(X, S, \mu)$	El espacio de funciones p-integrables con respecto a μ, página 69
$\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$	El espacio de funciones acotadas c.d., página 77

λ	La casi medida de Lebesgue, página 92
$\overline{\lambda}$	La medida de Lebesgue sobre $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, página 95
$M(X,S)$	Clase de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son S-medibles, página 39
$\overline{M}(X,S)$	Clase de funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son S-medibles, página 39
μ	Una medida o una casi medida, página 31
μ^*	La medida exterior generada por una casi medida μ, página 85
μ_*	La medida interior generada por una casi medida μ, página 190
$\overline{\mu}$	La restricción de μ^* sobre $\mathcal{A}^*$, página 90
$\mu \otimes \nu$	La medida producto de μ y ν, página 151
$\mathcal{N}(\mu)$	σ-anillo de conjuntos ν-nulos, página 37
$\mathcal{P}(X)$	El conjunto potencia de X, página 5
$\overline{\mathbb{R}}$	La recta real extendida $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, página 23
S	σ-álgebra de subconjuntos de X, página 6
$S(\mathbb{E})$	σ-álgebra generada por la clase $\mathbb{E}$, página 7
$\underline{S}(f)$	Clase de funciones S-simples no negativas menores o iguales que f, página 42
$\overline{S}$	La compleción de S con respecto a una medida, página 37
$S \otimes T$	σ-álgebra generada por la clase $S \times T$, página 143
τ	Una topología de subconjuntos de X, página 10
X	Un conjunto no vacío dado, página 5
(X,S)	Espacio medible, página 15
(X,S,μ)	Espacio de medida, página 37
χ_A	La función característica (o indicadora) de A, página 17

CAPÍTULO 1

Clases de subconjuntos de un conjunto dado

1. Introducción

En este capítulo introducimos importantes clases de subconjuntos de un conjunto dado no-vacío, se examinan diversos ejemplos y se considera la σ-álgebra generada por una familia dada, en particular se discute brevemente la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Por último, se prueba el lema de las clases monótonas (L.C.M.) que proporciona un método, en general más simple, para comprobar que una familia de conjuntos es una σ-álgebra.

En todo lo que sigue X denota un conjunto no vacío fijo y $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ denota la clase de todos los subconjuntos de X.

Definición 1.1. Una clase no vacía $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama un **anillo** de subconjuntos de X, si:

i) $E, F \in \mathcal{R} \Rightarrow E - F \in \mathcal{R}$.

ii) $E, F \in \mathcal{R} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{R}$.

Si además $X \in \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}$ se llama un **álgebra** de subconjuntos de X y entonces se denotará como $\mathcal{A}$.

(Ver el ejercicio (13)).

Como $\mathcal{R} \neq \emptyset$, entonces: $\emptyset \in \mathcal{R}$, ya que: $\emptyset = E - E \in \mathcal{R}$, si $E \in \mathcal{R}$.

Si $E, F \in \mathcal{R}$ entonces: $E \triangle F$ (diferencia simétrica) y $E \cap F$ pertenecen a $\mathcal{R}$ también ya que:

$$E \triangle F = (E - F) \cup (F - E) \text{ y } (E \cap F) = (E \cup F) - (E \triangle F).$$

Alternativamente, podíamos haber definido un anillo como una clase no vacía, la cual es cerrada bajo la intersección y la diferencia simétrica, esto se sigue inmediatamente de las identidades:

$$E - F = E \cap (E \triangle F) \text{ y } E \cup F = (E \cap F) \triangle (E \triangle F).$$

Notamos que si $\mathcal{R}$ es un álgebra, entonces $X - E \in \mathcal{R}$, si $E \in \mathcal{R}$ i.e. un álgebra es un anillo cerrado bajo la complementación.

Definición 1.2. Una clase no vacía $S \subset \mathcal{P}(X)$ se llama un **σ-anillo** de subconjuntos de X, si:

i) $E, F \in S \Rightarrow E - F \in S$.

ii) Si (E_n) es una sucesión de elementos de S, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.

Si además $X \in S$, entonces S se llama **σ-álgebra** de subconjuntos de X.

Como $E \cup F = E \cup F \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$, entonces todo σ-anillo, es un anillo. Inversamente, un anillo cerrado bajo uniones de familias numerables es un σ-anillo. Además, todo σ-anillo es cerrado bajo diferencia simétrica e intersecciones de familias numerables, esto último pues:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 - E_n).$$

Sin embargo, una clase no vacía de subconjuntos de X que es cerrada bajo diferencia simétrica e intersecciones de familias numerables no es necesariamente un σ-anillo (ver el ejercicio (3)).

Ejemplos 1.3.

1. Si X posee más de un elemento, entonces $\mathcal{P}(X)$ contiene al menos dos σ-álgebras, a saber: $S_1 = \{\emptyset, X\}$ y $S_2 = \mathcal{P}(X)$.

2. Sean X un conjunto no numerable, $\mathcal{R} = \{E \subset X : E$ es finito o numerable$\}$ y $S = \{E \subset X : E$ ó $X - E$ es finito ó numerable$\}$, entonces $\mathcal{R}$ es un σ-anillo y S es una σ-álgebra. Como X es no-numerable, entonces $\mathcal{R} \neq S$ y ambas son diferentes de $\mathcal{P}(X)$.

3. Si $f : X \to Y$ es una función y $S \subset \mathcal{P}(Y)$ es una σ-álgebra, entonces:
$$f^{-1}(S) = \{f^{-1}(E) : E \in S\}$$
es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

4. Si $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra y $A \subset X$ es un conjunto no vacío, entonces la clase $\{E \cap A : E \in S\}$ denotada por $S \cap A$, es una σ-álgebra de subconjuntos de A. Observe que este ejemplo se sigue del anterior si se considera la función $f : A \to X$ dada por $f(x) = x$.

5. Si $f : X \to Y$ es una función y $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra, entonces:
$$\{F \subset Y : f^{-1}(F) \in S\}$$
es una σ-álgebra de subconjuntos de Y.

6. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío y $S \subset \mathcal{P}(A)$ una σ-álgebra, entonces la clase
$$\{E \subset X : E \cap A \in S\}$$
es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Observe que este ejemplo se sigue del anterior si se considera la función $f : A \to X$ dada por $f(x) = x$.

7. Todo anillo (ó álgebra) con un número finito de elementos es un σ-anillo (ó una σ-álgebra). Un álgebra con un número finito de elementos tiene cardinalidad igual a 2^p para alguna $p \in \mathbb{N}$ (ver el ejercicio (9)), y toda σ-álgebra con una infinidad de elementos, es no numerable (ver el ejercicio (11)).

Proposición 1.4. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de σ-álgebras de subconjuntos de X, entonces $\bigcap\{S : S \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

La demostración es inmediata de la definición y la conclusión permanece válida si se reemplaza σ-álgebra con anillo, álgebra ó σ-anillo.

Teorema 1.5. Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ arbitrario, entonces existe una **única** σ-álgebra $S(\mathbb{E}) \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

i) $\mathbb{E} \subset S(\mathbb{E})$.

ii) Si S es una σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$, tal que $\mathbb{E} \subset S$, entonces $S(\mathbb{E}) \subset S$. $S(\mathbb{E})$ se llama la **σ-álgebra generada por** $\mathbb{E}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{S \subset \mathcal{P}(X) : S$ es σ-álgebra y $\mathbb{E} \subset S\}$, $\mathcal{F}$ es no vacía, pues $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$.

Sea $S(\mathbb{E}) = \bigcap\{S : S \in \mathcal{F}\}$, por la proposición anterior, $S(\mathbb{E})$ es una σ-álgebra y claramente $\mathbb{E} \subset S(\mathbb{E})$.

Si $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ álgebra con $\mathbb{E} \subset S$ entonces $S \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $S(\mathbb{E}) \subset S$.

Finalmente, si S' es una σ-álgebra $\subset \mathcal{P}(X)$ que satisface las propiedades i) y ii) entonces $S' \subset S(\mathbb{E})$ y $S(\mathbb{E}) \subset S'$, lo cual establece su unicidad.

□

Si se reemplaza σ-álgebra con un anillo, álgebra ó σ-anillo en el teorema anterior, tendremos la noción de **anillo**, **álgebra**, ó **σ-anillo generado** por $\mathbb{E}$ (denotados respectivamente por $\mathcal{R}(\mathbb{E})$, $\mathcal{A}(\mathbb{E})$ ó $\mathcal{SR}(\mathbb{E})$).

Las siguientes son algunas propiedades del operador: $\mathbb{E} \mapsto S(\mathbb{E})$.

Teorema 1.6. Si $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \subset \mathcal{P}(X)$ entonces:

i) $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}' \Rightarrow S(\mathbb{E}) \subset S(\mathbb{E}')$.

ii) Si $\mathbb{E}$ es una σ-álgebra, entonces $S(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$.

iii) $S(S(\mathbb{E})) = S(\mathbb{E})$.

iv) $\mathbb{E} \subset S(\mathbb{E}')$ y $\mathbb{E}' \subset S(\mathbb{E}) \Rightarrow S(\mathbb{E}) = S(\mathbb{E}')$.

Demostración.

i) $S(\mathbb{E}')$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathbb{E}$. $\Rightarrow S(\mathbb{E}) \subset S(\mathbb{E}')$.

ii) $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}$ y es una σ-álgebra, $\Rightarrow S(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$.

iii) Es inmediata de la anterior.

iv) Por los incisos i) y iii) se tiene:

$$S(\mathbb{E}) \subset S(S(\mathbb{E}')) = S(\mathbb{E}') \text{ y } S(\mathbb{E}') \subset S(S(\mathbb{E})) = S(\mathbb{E}) \Rightarrow S(\mathbb{E}) = S(\mathbb{E}').$$

□

Es claro que las propiedades análogas para $\mathcal{R}(\mathbb{E}), \mathcal{A}(\mathbb{E}), \mathcal{SR}(\mathbb{E})$ son ciertas también. Por otro lado tenemos

Teorema 1.7. Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacío, entonces:

i) Todo $F \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathbb{E}$.

ii) Todo $F \in \mathcal{SR}(\mathbb{E})$ está contenido en la unión de alguna sucesión de elementos de $\mathbb{E}$.

Demostración. Sean $\mathcal{R} = \{F \subset X : F$ está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathbb{E}\}$ y $\mathcal{SR} = \{F \subset X : F$ está contenido en la unión de alguna sucesión de elementos de $\mathbb{E}\}$. Claramente $\mathbb{E} \subset \mathcal{R}$ y $\mathbb{E} \subset \mathcal{SR}$, además es muy fácil comprobar que $\mathcal{R}$ es un anillo y $\mathcal{SR}$ es un σ-anillo por lo tanto $\mathcal{R}(\mathbb{E}) \subset \mathcal{R}$ y $\mathcal{SR}(\mathbb{E}) \subset \mathcal{SR}$.

□

Ejemplo 1.8.

1. Si $\mathbb{E} = \emptyset$ ó $\mathbb{E} = \{\emptyset\}$, entonces:
$$\mathcal{R}(\mathbb{E}) = \mathcal{SR}(\mathbb{E}) = \{\emptyset\} \text{ y } \mathcal{A}(\mathbb{E}) = S(\mathbb{E}) = \{\emptyset, X\}.$$

2. Si $E = \{A\}$ $(A \subset X)$, entonces:
$$\mathcal{R}(\mathbb{E}) = \mathcal{SR}(\mathbb{E}) = \{\emptyset, A\} \text{ y } \mathcal{A}(\mathbb{E}) = S(\mathbb{E}) = \{\emptyset, A, X - A, X\}.$$

3. Si $\mathbb{E}$ es un anillo, entonces:
$$\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \{F \subset X : F \in \mathbb{E} \text{ ó } X - F \in \mathbb{E}\}.$$
Si $\mathbb{E}$ es un σ-anillo, entonces:
$$\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \{F \subset X : F \in \mathbb{E} \text{ ó } X - F \in \mathbb{E}\}.$$

4. Sea X no-numerable y $\mathbb{E} = \{E \subset X : E$ es finito$\}$ o bien $\mathbb{E} = \{E \subset X : E$ tiene exactamente dos elementos$\}$, entonces:
   i) $\mathcal{R}(\mathbb{E}) = \{E \subset X : E$ es finito$\}$.
   ii) $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \{E \subset X : E$ ó $X - E$ es finito$\}$.
   iii) $\mathcal{SR}(\mathbb{E}) = \{E \subset X : E$ es finito o numerable$\}$.

iv) $S(\mathbb{E}) = \{E \subset X : E \text{ ó } X - E \text{ es finito o numerable}\}$.

Teorema 1.9. Sean $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ y $F \subset X$, entonces $S(\mathbb{E} \cap F) = S(\mathbb{E}) \cap F$ (donde $S(\mathbb{E} \cap F)$ denota la σ-álgebra de subconjuntos de F generada por $\{E \cap F : E \in \mathbb{E}\}$).

Demostración. $S(\mathbb{E}) \cap F = \{H \cap F : H \in S(\mathbb{E})\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de F que contiene a $\mathbb{E} \cap F$ y en consecuencia: $S(\mathbb{E} \cap F) \subset S(\mathbb{E}) \cap F$. Inversamente, se verifica que $\{H \in S(\mathbb{E}) : H \cap F \in S(\mathbb{E} \cap F)\}$ es una σ-álgebra contenida en $S(\mathbb{E})$ que contiene a $\mathbb{E}$, así que coincide con $S(\mathbb{E})$, por lo tanto $S(\mathbb{E}) \cap F \subset S(\mathbb{E} \cap F)$.

□

El teorema anterior es también cierto si se consideran el anillo, el álgebra y el σ-ánillo generado por $\mathbb{E} \cap F$ y las pruebas son enteramente análogas.

2. Una σ-álgebra importante

Sean $X = \mathbb{R}$ y $\tau \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la topología usual de X, definamos la **σ-álgebra de Borel** $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, como la σ-álgebra generada por τ, i.e. $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = S(\tau)$. Los elementos de $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ son llamados borelianos.

Si $G \in \tau$, entonces G es la unión de una familia, a lo más numerable, de intervalos abiertos con extremos en $\mathbb{R}$, así pues si I denota la clase de intervalos abiertos con extremos en $\mathbb{R}$, entonces $\tau \subset S(I)$ y como $I \subset \tau$, se sigue del teorema 1.6 que $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = S(I)$.

Si $\mathbb{E} = \{[a,b) : a < b, (a, b \in \mathbb{R})\}$ entonces:

Todo intervalo de I es la unión de una familia numerable de intervalos de $\mathbb{E}$ y todo intervalo de $\mathbb{E}$ es la intersección de una familia numerable de intervalos de I.

Demostración.

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \text{ y } [a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)$$

en consecuencia $I \subset S(\mathbb{E})$ y $\mathbb{E} \subset S(I)$ y por lo tanto $S(\mathbb{E}) = S(I) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

□

De manera análoga, se puede probar que $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra generada por la clase de los intervalos cerrados y por la de los intervalos semicerrados. En cada una de las cuatro clases consideradas basta tomar a los extremos de los intervalos en algún subconjunto denso de $\mathbb{R}$ y entonces la σ-álgebra generada es $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ también.

A continuación identificamos algunos borelianos: Los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados, los conjuntos numerables y los intervalos de todo tipo son borelianos. Un conjunto es de **tipo** $\mathcal{G}_\delta$ si es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos y un conjunto es de **tipo** $\mathcal{F}_\sigma$ si es la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados y los conjuntos de ambas clases son borelianos también.

Continuando de esta manera definimos la clase de conjuntos de **tipo** $\mathcal{G}_{\sigma\delta}$ como aquellos que se pueden escribir como la unión numerable de conjuntos de tipo $\mathcal{G}_\delta$ y los de **tipo** $\mathcal{F}_{\delta\sigma}$ como la clase de conjuntos que pueden escribirse como la intersección numerable de conjuntos de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Así inductivamente, se pueden construir las dos siguientes cadenas de clases de conjuntos borelianos:

$$\tau \subset \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{G}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta} \subset \mathcal{G}_{\sigma\delta\sigma\delta} \subset \cdots \\ \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma} \subset \mathcal{F}_{\delta\sigma\delta\sigma} \subset \cdots \end{array} \right\} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$$

El complemento de cualquier conjunto en alguna clase, pertenence a la clase correspondiente en el otro renglón. Puede probarse que cada contención es estricta y que la totalidad de dichas clases no agotan a $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Más adelante se probará que $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. (Ver C. Kuratowski "Topologie I" Vol. 3)

3. El lema de las clases monótonas

(La lectura de esta parte puede posponerse hasta el capítulo once en donde será usada.)

Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ dada y supongamos que todo $E \in \mathbb{E}$ satisface cierta propiedad P. Una manera de probar que todo elemento de $S(\mathbb{E})$ también satisface la propiedad P consiste en verificar que $\{F \subset X : F \text{ satisface } P\}$ es una σ-álgebra, esto, en casos particulares, puede resultar una tarea difícil. Para simplificar esta tarea se considerarán dos nociones de clases de subconjuntos de X introducidas en 1961 por E. B. Dynkin.

Definición 1.10.

a) Una clase no vacía $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, se llama un **$\pi$-sistema** si es cerrada bajo intersecciones finitas.

b) Una clase $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama un **λ-sistema** (o sistema de Dynkin). Si:

   i) $X \in \mathcal{L}$.

   ii) $E, F \in \mathcal{L}$ y $F \subset E \Rightarrow E - F \in \mathcal{L}$. (Cerradura bajo la diferencia propia).

   iii) Si (E_n) es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$.

Observaciones 1.11.

i) Si (E_n) es una sucesión decreciente de elementos de un λ-sistema $\mathcal{L}$, entonces: $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$.

ii) Sean $\mathcal{L}$ un λ-sistema y $E, F \in \mathcal{L}$ ajenos, entonces $E \cup F \in \mathcal{L}$.

iii) Si $\mathcal{L}$ es λ y π-sistemas, entonces $\mathcal{L}$ es una σ-álgebra e inversamente.

Demostración.

i) Inmediata, de las leyes de De Morgan.

ii) Como $\mathcal{L}$ es cerrado bajo complementación, es suficiente probar que:

$$X - (E \cup F) \in \mathcal{L}.$$

Por hipótesis $F \subset X - E \in \mathcal{L}$ y por ii), de la definición,

$$X - (E \cup F) = (X - E) - F \in \mathcal{L}.$$

iii) En virtud de la propiedad iii) de la definición, es suficiente probar que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo la unión, pero:

$$E \cup F = E \cup (F - E \cap F) \quad (E, F \in \mathcal{L}).$$

Inversamente es claro que una σ-álgebra satisface las propiedades de un λ y π-sistemas.

□

Intersecciones arbitrarias de π (y λ) sistema es un π (λ) sistema, esto nos permite hablar del π (y λ) sistema generado por una familia $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ que denotaremos $\pi(\mathbb{E})$ (y $\mathcal{L}(\mathbb{E})$). Las propiedades análogas a 1.6 y a 1.9 permanecen válidas. El siguiente resultado es conocido como el **lema de las clases monótonas** (L.C.M).

Teorema 1.12. (L.C.M.) Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ un π-sistema y $\mathcal{L}_0$ un λ-sistema tal es que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_0$, entonces $S(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_0$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los λ-sistemas en $\mathcal{P}(X)$ que contienen a $\mathcal{C}$, entonces:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \bigcap\{\mathcal{L} : \mathcal{L} \in \mathcal{F}\}.$$

Probemos que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ es un π-sistema.

Para $E \in \mathcal{C}$ definamos: $\mathcal{L}_E = \{F \subset X : E \cap F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})\}$. Como $\mathcal{C}$ es un π-sistema se tiene que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_E$, además como $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ es un λ-sistema es fácil verificar que $\mathcal{L}_E$ es un λ-sistema, así pues $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_E$. Ahora sea $F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ fijo y sea $\mathcal{L}'_F = \{E \subset X : E \cap F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})\}$.

Como $E \cap F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ para todo $E \in \mathcal{C}$, para todo $F \in \mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_E$ entonces:

$$E \cap F \in \mathcal{L}(\mathcal{C}) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{C} \text{ y para todo } F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}'_F$ para todo $F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Como $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ es un λ-sistema se comprueba que $\mathcal{L}'_F$ es un λ-sistema para todo $F \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, así pues:

$$\mathcal{L}'_F \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } F \in \mathcal{L}(\mathcal{C}),$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}'_F \quad \text{para todo } F \in \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

Esto prueba que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ es un π-sistema además de ser λ-sistema, entonces por 1.12 iii) es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, por lo tanto $S(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_0$.

□

Corolario 1.13. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ es un π-sistema, entonces $S(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Demostración. Por el teorema $S(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Inversamente, $S(\mathcal{C})$ es un λ-sistema que contiene a $\mathcal{C}$ y por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset S(\mathcal{C})$.

□

Observación 1.14. Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que todo $E \in \mathbb{E}$ satisface cierta propiedad P, si $\mathbb{E}$ es un π-sistema, entonces para comprobar que todo elemento de $S(\mathbb{E})$ satisface la propiedad P, será suficiente verificar que: $\mathcal{L} = \{F \subset X : F \text{ satisface } P\}$ es un λ-sistema.

CAPÍTULO 2

Funciones medibles con respecto a una sigma álgebra S

1. Introducción

En este capítulo se introduce la clase $\mathbb{M}(X, S)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son medibles con respecto a una σ-álgebra S de subconjuntos de X. Se muestra que estas funciones son el límite puntual de funciones que toman sólo un número finito de valores en elementos de S. Se prueba que $\mathbb{M}(X, S)$ es un espacio vectorial, cerrado bajo una gran variedad de operaciones numerables. Se define la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$ y se considera la medibilidad para funciones con valores extendidos y con valores complejos.

Definición 2.1. Un **espacio medible** es una pareja (X, S) en la que X es un conjunto no vacío y S es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Definición 2.2. Sean (X, S) y (Y, S') dos espacios medibles. Una función $f : X \to Y$ se llama **medible** relativa a las σ-álgebras S y S' si $f^{-1}(S') \subset S$ i.e. : $f^{-1}(E') \in S$, para todo $E' \in S'$. Si $Y = \mathbb{R}$ y $S' = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, entonces diremos que f es S-**medible** si $f^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \subset S$.

Proposición 2.3. Sean (X, S) y (Y, S') dos espacios medibles y $f : X \to Y$ una función. Supongamos que existe $\mathbb{E}' \subset \mathcal{P}(Y)$ tal que $S(\mathbb{E}') = S'$. Si $f^{-1}(\mathbb{E}') \subset S$, entonces f es medible relativa a S y S'.

Demostración. Por 1.3.5 $\mathcal{K} = \{F' \subset Y : f^{-1}(F') \in S\}$ es una σ-álgebra que por hipótesis contiene a $\mathbb{E}'$. Así $S' = S(\mathbb{E}') \subset \mathcal{K}$, por lo tanto $f^{-1}(S') \subset f^{-1}(\mathcal{K}) \subset S$.

□

Para el caso especial en el que $Y = \mathbb{R}$ y $S' = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ obtenemos:

Corolario 2.4. Sean (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es S-medible.

b) $f^{-1}((c,+\infty)) = \{x \in X : f(x) > c\}$ pertenece a S para todo $c \in \mathbb{R}$.

c) $f^{-1}((-\infty,c]) = \{x \in X : f(x) \leq c\}$ pertenece a S para todo $c \in \mathbb{R}$.

d) $f^{-1}((-\infty,c)) = \{x \in X : f(x) < c\}$ pertenece a S para todo $c \in \mathbb{R}$.

e) $f^{-1}([c,+\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq c\}$ pertenece a S para todo $c \in \mathbb{R}$.[1]

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) $(c,+\infty) \in \mathbb{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$.

b) $\Rightarrow$ c) $f^{-1}((-\infty,c]) = X - f^{-1}((c,+\infty))$ pertenece a S, para todo $c \in \mathbb{R}$.

c) $\Rightarrow$ d) $f^{-1}((-\infty,c)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((-\infty, c-\frac{1}{n}]\right)$ pertenece a S, para todo $c \in \mathbb{R}$.

d) $\Rightarrow$ e) $f^{-1}([c,+\infty)) = X - f^{-1}((-\infty,c))$ pertenece a S, para todo $c \in \mathbb{R}$.

e) $\Rightarrow$ a) Sea $\mathbb{E}' = \{[c,+\infty) : c \in \mathbb{R}\}$. Por la discusión posterior a 1.9 se tiene que $S(\mathbb{E}') = \mathbb{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$.

Por la hipótesis y 2.3 se tiene que f es S-medible.

$\square$

Ejemplos 2.5.

1. Sea (X,S) un espacio medible, entonces toda función constante $f : X \to \mathbb{R}$ es S-medible.

[1] El corolario anterior permanece válido si se considera solamente $c \in S$ con $S \subset \mathbb{R}$ denso. También cada una de las condiciones implican que $\{x \in X : f(x) = c\}$ para todo $c \in \mathbb{R}$, sin embargo, esta última condición no garantiza la S-medibilidad de f (ver el ejercicio (21)).

2. Sea (X,S) un espacio medible. Para $A \subset X$ definimos la **función característica** (o **función indicadora**) de A denotada $\chi_A : X \to \{0,1\}$, como sigue:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Entonces: χ_A es S-medible $\Leftrightarrow A \in S$.

Demostración.

$\Rightarrow]$

$$A = \{x \in X : \chi_A(x) > 0\} \quad \text{pertenece a} \quad S.$$

$\Leftarrow]$

Verificamos la condición 2.4 b)

$$\{x \in X : \chi_A(x) > c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } c \geq 1, \\ A, & \text{si } 0 \leq c < 1, \\ X, & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

En cualquier caso, se tiene que: $\{x \in X : \chi_A(x) > c\}$ pertenece a S.

$\square$

3. Sea (X,S) un espacio medible. Una función $s : X \to \mathbb{R}$ se llama **S-simple** si s toma solamente un número finito de valores y es S-medible. A continuación describiremos a estas funciones. Sea $s : X \to \mathbb{R}$ una función S-simple y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ todos los valores (diferentes) tomados por s; si

$$E_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\},$$

entonces:

$$E_i \in S, \quad (i = 1, \ldots, n), \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{y} \quad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}. \tag{2.1}$$

Inversamente, si s es una combinación lineal de funciones características de conjuntos ajenos en S, entonces es S-medible. Concretamente, si $s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{F_i}$ entonces para todo $c \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : s(x) > c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \beta_i \leq c \quad \text{para todo} \\ & i = 1, \ldots, n\,, \\ \bigcup\{F_i : \beta_i > c\}, & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

por lo tanto es S-medible. Así pues: s es S-simple si y sólo si s es una combinación lineal de funciones características de conjuntos ajenos en S.[2] A la descripción de s como en (2.1) con los α_i diferentes y con los E_i ajenos, la llamaremos **canónica**.

4. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama **semicontinua superiormente** (o **semicontinua inferiormente**) si $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$ ($\{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$, respectivamente) es un conjunto abierto para todo $c \in \mathbb{R}$.

   Claramente f es continua si y sólo si f es semicontinua superior e inferiormente. Si $X = \mathbb{R}$ y $S = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, entonces toda función semicontinua es $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible, lo cual es inmediato de 2.4 b) y 2.4 d). En particular toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible.

5. Toda función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible.

   Demostración. Si f es monótona creciente, entonces $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$ es necesariamente de alguna de las siguientes formas: $(\alpha, +\infty)$, $[\alpha, +\infty)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\emptyset$ o $\mathbb{R}$, los cuales son borelianos. Si f es monótona decreciente, el argumento es análogo usando 2.4 d).

   □

El siguiente resultado nos permite construir gran variedad de ejemplos.

6. Sean (X, S) un espacio medible, $f : X \to \mathbb{R}$ una función S-medible y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible, entonces $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ es S-medible.

[2] Si s y t son S-simples entonces $s + t$, αS con $\alpha \in \mathbb{R}$, st y $\frac{1}{s}$ (si $s \neq 0$) son S-simples también. (Ejercicio).

Demostración.

$$(\varphi \circ f)^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})) \subset f^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \subset S\,.$$

□

2. Los lemas básicos de aproximación de funciones medibles

Los siguientes lemas ponen de manifiesto el papel de las funciones S-simples como "aproximadoras elementales" de las funciones S-medibles.

Lema 2.6. Sea (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función S-medible no negativa, entonces existe una sucesión (s_n) de funciones S-simples tal que:

i) $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$

ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ $(x \in X)$

iii) Si f es acotada, entonces $s_n \to f$ uniformemente en X.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $k \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ definimos:

$$E_n(k) = \left\{x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\} \text{ y } E_n(n2^n) = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Como f es S-medible y no-negativa, la familia $\{E_n(k) : k = 0, 1, \ldots, n2^n\}$ constituye una partición de X con elementos de S. Definimos $s_n : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} \text{ si } x \in E_n(k), \text{ o sea: } s_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n(k)}$$

i) Claramente s_n es S-simple, no-negativa, y $s_n \leq f$.

   Sea $x \in X$ fija. Si $f(x) \geq n+1$, entonces: $s_n(x) = n < n+1 \leq s_{n+1}(x)$.

   Si $n \leq f(x) < n+1$, entonces $s_n(x) = n \leq s_{n+1}(x)$.

Finalmente si $f(x) < n$, entonces

$$f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ para una } k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$$

y así

$$f(x) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \text{ ó } f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$$

de donde:

$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} \leq s_{n+1}(x),$$

por lo tanto $s_n(x) \leq s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $x \in X$ fija, hallamos $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $n > f(x)$, entonces

$$\text{pora todo } m \geq n \quad |s_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m},$$

por lo tanto, $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$.

iii) Si $f \leq M$, hallamos $n = n(M) \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$, entonces

$$\text{para todo } m \geq n \quad |s_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m} \quad \text{para todo } x \in X$$

por lo tanto, $s_n \to f$ uniformemente.

□

Lema 2.7. Sean (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función S-medible, entonces existe una sucesión (r_n) de funciones S-simples tal que:

i) $|r_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x)$ para todo $x \in X$.

iii) Si f es acotada, entonces $r_n \to f$ uniformemente en X.

Demostración. Definimos las siguientes funciones no-negativas $f^+, f^- : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Notamos que $|f| = f^+ + f^-$ y $f = f^+ - f^-$.

Claramente:

$$\{x \in X : f^+ > c\} = \begin{cases} X, & \text{si } c < 0\,, \\ \{x \in X : f(x) > c\}. & \text{si } c \geq 0\,, \end{cases}$$

por lo tanto f^+ es S-medible. De manera análoga se puede demostrar que f^- es S-medible. Usando el lema anterior hallamos dos sucesiones de funciones S-simples (s_n) y (t_n) tales que:

$$0 \leq s_n \leq s_{n+1} \text{ y } 0 \leq t_n \leq t_{n+1}$$

$$s_n \to f^+ \text{ y } t_n \to f^-.$$

Definimos $r_n = s_n - t_n$ entonces (r_n) es una sucesión de funciones S-simples con:

i) $|r_n| = |s_n - t_n| \leq s_n + t_n \leq f^+ + f^- = |f| \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $f(x) = f^+(x) - f^-(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} t_n(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x)$ para todo $x \in X$

iii) Si $|f| \leq M$, entonces $f^+ \leq M$ y $f^- \leq M$ también y por el lema anterior, $s_n \to f^+$ y $t_n \to f^-$ uniformemente en X por lo tanto $r_n = s_n - t_n \to f^+ - f^- = f$ uniformemente en X.

□

La familia de funciones S-medibles es estable bajo una gran variedad de operaciones de toma de límite, a saber:

Teorema 2.8. Sea (X, S) un espacio medible y (f_n) una sucesión de funciones S-medibles tal que $(f_n(x))$ es acotada para todo $x \in X$. Definimos:

i) $m_n(x) = \min_{1\leq i\leq n} \{f_i(x)\}$

ii) $M_n(x) = \max_{1\leq i\leq n}\{f_i(x)\}$

iii) $f(x) = \inf_{i\in\mathbb{N}}\{f_i(x)\}$

iv) $F(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{f_i(x)\}$

v) $f^*(x) = \varliminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$

vi) $F^*(x) = \varlimsup_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$

Entonces todas son funciones S-medibles.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ arbitraria entonces:

i) $\{x \in X : m_n(x) > c\} = \{x \in X : f_i(x) > c \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n\}$
$= \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in X : f_i(x) > c\}$ pertenece a S

ii) $\{x \in X : M_n(x) > c\} = \{x \in X : f_i(x) > c \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}\}$
$= \bigcup_{i=1}^{n}\{x \in X : f_i(x) > c\}$ pertenece a S

iii) $\{x \in X : f(x) \geq c\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{x \in X : f_i(x) \geq c\}$

iv) $\{x \in X : F(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f_n(x) > c\}$ pertenece a S

v) Por definición: $f^*(x) = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n}\{f_k(x)\}$.
Si $h_n(x) = \inf_{k\geq n}\{f_k(x)\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces por iii) (h_n) es una sucesión de funciones S-medibles y por iv) $f^* = \sup_{n\geq 1} h_n$ es S-medible.

vi) Es análoga a la prueba del inciso anterior.

□

Corolario 2.9. Sean (X, S) un espacio medible y (f_n) una sucesión convergente de funciones S-medibles, entonces $L(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es S-medible.

Demostración. Como (f_n) converge, se tiene $L = f^*$, la cual es S-medible por 2.8 v).

□

(Ver los ejercicios (24) (25) y (26)).

Reuniendo algunos de estos resultados, obtenemos una nueva y útil caracterización de las funciones S-medibles.

Teorema 2.10. Sea (X, S) un espacio medible, entonces $f : X \to \mathbb{R}$ es S-medible si y sólo si f es el límite de una sucesión de funciones S-simples.

Demostración.
$\Rightarrow]$
Es parte del lema 2.7.
$\Leftarrow]$
Se sigue de Corolario anterior.

□

Haciendo uso del nuevo criterio de S-medibilidad es fácil establecer la S-medibilidad de combinaciones algebraicas de funciones S-medibles, explícitamente:

Teorema 2.11. Sean (X, S) un espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones S-medibles entonces αf, $f + g$ y fg $(\alpha \in \mathbb{R})$ son S-medibles.

Demostración. Sean (s_n) y (t_n) sucesiones de funciones S-simples tales que $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ y $g = \lim_{n\to\infty} t_n$, entonces (αs_n), $(s_n + t_n)$ y $(s_n t_n)$ son sucesiones de funciones S-simples que convergen a αf, $f + g$ y fg respectivamente y son por 2.10, funciones S-medibles.

□

La S-medibilidad de $\frac{1}{f}$ se considerará más adelante.

3. La recta real extendida

Para poder trabajar con toda clase de límites, especialmente de sucesiones crecientes y decrecientes no acotadas, será conveniente agregar a $\mathbb{R}$ dos símbolos, denotados por $+\infty$ y $-\infty$ y escribiremos: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

A continuación definimos las operaciones algebraicas (permitidas) entre ellos y los elementos de $\mathbb{R}$:

a) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

b) $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty$ y $(\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty$.

c)
$$x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ \mp\infty, & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Las siguientes expresiones no se definen: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, ni cocientes en el que el denominador sea $+\infty$, 0 o $-\infty$.

Introducimos un orden total en $\overline{\mathbb{R}}$, respetando el orden usual de $\mathbb{R}$ y conviniendo en poner: $-\infty<x<+\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Llamamos la **recta real extendida** al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ con las operaciones mencionadas y el orden convenido.

Si $(a_n)\subset\overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión entonces escribiremos $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}=-\infty$ si (a_n) no está acotada inferiormente, análogamente con $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}=+\infty$ si (a_n) no está acotada superiormente (Ver el ejercicio (16) para la definición de límites extendidos de sucesiones no acotadas).

Finalmente, definimos la **σ-álgebra de Borel extendida**, como la σ-álgebra de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$, denotada por $\mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ e igual a

$$S\left(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\right).$$

Asi como en 2.2 tenemos la siguiente definición:

Definición 2.12. Sea (X,S) un espacio medible. Una función $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ se llama **S-medible** si:
$$f^{-1}(\mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}})\subset S.$$

Observamos que si $S(\mathbb{E})=\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, entonces $S\left(\mathbb{E}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\right)=\mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, por lo que de manera totalmente análoga al corolario 2.4 obtenemos otras caracterizaciones de S-medibilidad para funciones con valores extendidos y cuyas pruebas omitimos.

Proposición 2.13. Sea (X,S) un espacio medible y $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es S-medible.

b) $f^{-1}((c,+\infty])=\{x\in X: f(x)>c\}$ pertenece a S para todo $c\in\mathbb{R}$.

c) $f^{-1}([-\infty,c])=\{x\in X: f(x)\le c\}$ pertenece a S para todo $c\in\mathbb{R}$.

d) $f^{-1}([-\infty,c))=\{x\in X: f(x)<c\}$ pertenece a S para todo $c\in\mathbb{R}$.

e) $f^{-1}([c,+\infty])=\{x\in X: f(x)\ge c\}$ pertenece a S para todo $c\in\mathbb{R}$.

En donde $(c,+\infty]=(c,+\infty)\cup\{+\infty\}$ y lo correspondiente para los otros intervalos extendidos.

Enunciamos y probamos el resultado correspondiente al teorema 2.10

Teorema 2.14. Sean (X,S) un espacio medible y $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces f es S-medible si y sólo si existe una sucesión de funciones S-simples $(s_n:X\to\mathbb{R})$ tal que

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)\quad(x\in X).$$

Demostración.

$\Rightarrow]$

Escribimos $f=f^+-f^-$ como en 2.7 y verificamos al igual que en dicho lema, que f^+ y f^- son funciones S-medibles no-negativas. Note que la descomposición f^+-f^- de f no introduce expresiones indeterminadas del tipo $(+\infty)+(-\infty)$ ó $(-\infty)+(+\infty)$. A continuación construimos como en 2.6 dos sucesiones de funciones reales S-simples (r_n) y (t_n) tales que:

$$r_n(x)\to f^+(x) \text{ y } t_n(x)\to f^-(x)$$

para todo $x\in X$ (límites en el sentido extendido).

Por lo tanto, $s_n=r_n-t_n\to f$.

$\Leftarrow]$

Claramente esta parte puede establecerse como en 2.8, 2.9 y 2.10, sin embargo preferimos dar una prueba diferente. Sea (s_n) una sucesión de funciones S-simples tal que $s_n\to f(x)$ para todo $x\in X$, entonces para todo $c\in\mathbb{R}$:

$$\{x\in X: f(x)>c\}=\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{x\in X: s_k(x)>c+\frac{1}{r}\right\}\in S.$$

En efecto,

$$f(x) > c \Leftrightarrow f(x) - c > 0 \Leftrightarrow \text{ existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(x) - c > \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } r \in \mathbb{N} \text{ y existe } n = n(x,r) \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$s_k(x) - c > \frac{1}{r} \quad \text{para todo } k \geq n$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : s_k(x) > c + \frac{1}{r} \right\}$$

Por lo tanto, f es S-medible.

□

Observaciones 2.15. La parte final de la demostración del teorema anterior puede ser empleada para obtener el resultado correspondiente a 2.9 para sucesiones de funciones S-medibles con valores extendidos.

El siguiente teorema es usado con frecuencia para reducir afirmaciones acerca de una función con valores extendidos en afirmaciones para la restricción de la función al subconjunto en donde es finita.

Teorema 2.16. Sea (X, S) un espacio medible. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es S-medible si y sólo si

i) $E_{+\infty}(f) = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $E_{-\infty}(f) = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ pertenecen a S.

ii) La función real $f_0 : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin E_{+\infty}(f) \cup E_{-\infty}(f) \\ 0 & \text{si } x \in E_{+\infty}(f) \cup E_{-\infty}(f) \end{cases}$$

es S-medible.

Demostración.
$\Rightarrow]$

$E_{+\infty}(f) = f^{-1}(\{+\infty\})$ y $E_{-\infty}(f) = f^{-1}(\{-\infty\})$ pertenecen a S por 2.13

Sea $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, si $c \geq 0$ entonces:

$$\{x \in X : f_0(x) > c\} = \{x \in X : f(x) > c\} - E_{+\infty}(f) \text{ pertenece a } S$$

y si $c < 0$ entonces:

$$\{x \in X : f_0(x) > c\} = \{x \in X : f(x) > c\} \cup E_{-\infty}(f) \text{ pertenece a } S,$$

por lo tanto f_0 es S-medible.
$\Leftarrow]$
Si $c \geq 0$ entonces:

$$\{x \in X : f(x) > c\} = \{x \in X : f_0(x) > c\} \cup E_{+\infty}(f) \text{ pertenece a } S$$

y si $c < 0$, entonces:

$$\{x \in X : f(x) > c\} = \{x \in X : f_0(x) > c\} \cup E_{-\infty}(f) \text{ pertenece a } S$$

por lo tanto f es S-medible.

□

Observaciones 2.17. Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones con valores extendidos. En virtud de las expresiones indefinidas: $(+\infty) + (-\infty)$ y $(-\infty) + (+\infty)$ es necesario precisar la definición de $(f+g)(x)$. Si

$$x \in (E_{+\infty}(f) \cap E_{-\infty}(g)) \cup (E_{-\infty}(f)) \cap E_{+\infty}(g)),$$

entonces por simplicidad, ponemos $(f+g)(x) = 0$ para dichos puntos; esto sin embargo, no debe hacer creer al lector que las expresiones antes indefinidas, ahora ya no lo son. En cualquier otro punto $x \in X$ definimos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

En una situación similar se encuentra $(\frac{1}{f})(x)$ para aquellas $x \in X$ en las que $f(x) = +\infty$, 0 ó $-\infty$. Nuevamente definimos $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$ para dichas x con la misma advertencia.

Con estas definiciones, podemos establecer la S-medibilidad de combinaciones algebraicas de funciones con valores extendidos, análogo a 2.11.

Teorema 2.18. Sean (X, S) un espacio medible y $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones S-medibles, entonces αf, $f + g$, fg y $\frac{1}{f}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ son S-medibles.

Demostración. Usaremos el Teorema 2.14. Sean (s_n) y (t_n) funciones S-simples tales que $s_n \to f$ y $t_n \to g$, entonces (αs_n) es S-simple y $\alpha s_n \to \alpha f$ por lo tanto αf es S-medible.

Para $f + g$ tenemos que si

$$D = (E_{+\infty}(f) \cap E_{-\infty}(g)) \cup (E_{-\infty}(f) \cap E_{+\infty}(g))$$

entonces: $(s_n + t_n)\chi_{X-D} \to f + g$ por lo tanto $(f + g)$ es S-medible. Para fg consideremos $E_0(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ y $E_0(g) = \{x \in X : g(x) = 0\}$. entonces:

$$(s_n \chi_{X - E_0(f)}) \cdot (t_n \chi_{X - E_0(g)}) \to fg.$$

Para la S-medibilidad de $\frac{1}{f}$ ver el ejercicio (22).

□

4. Funciones medibles con valores complejos

Definición 2.19. Sean (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es S-medible si $f^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}) \subset S$, donde $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ denota la σ-álgebra de Borel de subconjuntos de $\mathbb{C}$ identificado con $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

Enunciamos y probamos el resultado esperado:

Teorema 2.20. Sean (X, S) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{C}$ una función S-medible, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) f es S-medible

ii) para todo $c, d \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : (\Re f)(x) > c, (\Im f)(x) > d\}$ pertenece a S ($\Re f$ e $\Im f$ denotan la parte real e imaginaria de f).

iii) $\Re f$ e $\Im f : X \to \mathbb{R}$ son S-medibles

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Sean $c, d \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Como $(c, +\infty) \times (d, +\infty) \in \mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ se tiene que

$$\{x \in X : (\Re f)(x) > c, (\Im f)(x) > d\} = f^{-1}((c, +\infty) \times (d, +\infty))$$

pertenece a S

ii) $\Rightarrow$ iii) para todo $c, d \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : (\Re f)(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : (\Re f)(x) > c, (\Im f)(x) > -n\}$$

pertenece a S

$$\{x \in X : (\Im f)(x) > d\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : (\Re f)(x) > -n, (\Im f)(x) > d\}$$

pertenece a S

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $\mathbb{E} = \{(c, +\infty) \times (d, +\infty) : c, d \in \mathbb{R}\}$, entonces

$$f^{-1}((c, +\infty) \times (d, +\infty)) = (\Re f)^{-1}((c, +\infty)) \cap (\Im f)^{-1}((d, +\infty))$$

pertenece a S; por hipótesis, i.e. $f^{-1}(\mathbb{E}) \subset S$ y es fácil comprobar que $S(\mathbb{E}) = \mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ por lo tanto f es S-medible por 2.3.

□

Es claro que operaciones algebráicas, toma de límite y conjugación compleja de funciones S-medibles producen funciones S-medibles.

Capítulo 3

Medidas sobre sigma álgebras

1. Introducción

Introduciremos la noción de medida sobre una σ-álgebra y veremos algunos ejemplos. Se obtienen las propiedades de continuidad básicas, se considera el concepto de medida cero y el de que una proposición sea válida casi dondequiera (c.d.).

Definición 3.1. Sea (X, S) un espacio medible. Una **medida** en (X, S) es una función $\mu : X \to \overline{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in S$

iii) μ es **σ-aditiva**, i.e. Si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de S, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición 3.2. Sea μ una medida en (X, S). Se dice que μ es **finita** si no toma el valor extendido $+\infty$. Si es posible hallar una sucesión (E_n) de elementos de S tal que $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que μ es σ-finita. Claramente toda medida finita es automáticamente **σ-finita**.

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de la definición.

Proposición 3.3. Sea μ una medida en (X, S) entonces:

a) μ es **aditiva**; i.e. $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si $E_1, E_2 \in S$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

b) μ es **monótona**; i.e. Si $E \subset F$, con $E, F \in S$, entonces se tiene: $\mu(E) \leq \mu(F)$

c) μ es **sustractiva**; i.e. Si $E \subset F$, con $E, F \in S$ y $\mu(E) < +\infty$, entonces se tiene:
$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$$

Demostración.

a) Sean $F_1 = E_1, F_2 = E_2$ y $F_n = \emptyset$ si $n > 2$, entonces (F_n) es una sucesión disjunta de elementos de S y por 3.1 i) y 3.1 iii) obtenemos:
$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$
Es claro que la aditividad puede extenderse por inducción a cualquier número finito de elementos ajenos de S.

b) Como $F = (F - E) \cup E$ (unión disjunta de elementos de S), obtenemos del inciso anterior que: $\mu(F) = \mu(F - E) + \mu(E)$, asi pues: $\mu(E) \leq \mu(F)$. (por 3.1 ii))

c) De la identidad: $\mu(F) = \mu(F - E) + \mu(E)$, obtenemos al restar $\mu(E) < +\infty$ que: $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F - E)$. Note que la igualdad anterior tiene sentido aún si $\mu(F) = +\infty$

□

2. Ejemplos

1) Sean (X, S) un espacio medible arbitrario y $x_0 \in X$ fijo, definimos $\mu : S \to \{0, 1\}$ como sigue:
$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E, \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E. \end{cases}$$
Es claro que μ es una medida finita, llamada la **medida unitaria concentrada en** x_0.

2) Sean X no vacío dado y $S = \mathcal{P}(X)$, definimos $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:
$$\mu(E) = \begin{cases} \#(X) < \infty & \text{si } E \text{ es finito} \\ +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$$
Entonces μ es una medida (llamada la **medida de conteo** en X). Es inmediato comprobar que: μ es finita si y sólo si X es finito y μ es σ-finita si y sólo si X es numerable.

3) Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\overline{a} = (a_n)$ una sucesión de reales extendidos, no-negativos. Definimos $\mu_{\overline{a}} : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:
$$\mu_{\overline{a}}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset. \\ \sum_{n \in E} a_n & \text{si } E \neq \emptyset. \end{cases}$$
entonces μ es una medida, la cual es finita si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ y es σ-finita si y sólo si $a_n < +\infty$.

Inversamente, toda medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}$ se obtiene mediante el método indicado a partir de una única sucesión $\overline{a} = (a_n)$ de números reales extendidos no-negativos (i.e. $\mu = \mu_{\overline{a}}$ (Ver el ejercicio (27)). Observe que la medida de conteo en $\mathbb{N}$ corresponde al caso en el que $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4) Sean (X, S) un espacio medible, $\mu_1, \mu_2 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas y $c_1, c_2 \geq 0$ entonces:
$$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 : S \to \overline{\mathbb{R}}$$
es una medida también

5) Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida y $E \in S$ con $\mu(E) > 0$.

Definimos $\mu^E : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue: $\mu^E(F) = \mu(E \cap F)$, con $F \in S$, entonces μ^E es una medida en (X, S) llamada la **contracción** de μ a E. También definimos $\mu_E : S \cap E \to \overline{\mathbb{R}}$ mediante la fórmula:
$$\mu_E(F) = \mu(F) \quad \text{si } F \in S \cap E.$$
μ_E es una medida sobre E, llamada la **restricción** de μ a E

6) Sea $X = \mathbb{R}$ y $S = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ entonces existe una **única** medida σ-finita definida sobre una σ-álgebra que contiene a S y que asigna a cada intervalo su longitud. Denotamos por $\overline{\lambda}$ dicha medida y la llamaremos la **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}$. Los capítulos siete y ocho estan dedicados íntegramente a su construcción, así como a su estudio.

Continuando con propiedades generales de una medida tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.4. Sea μ una medida definida sobre el espacio medible (X, S).

a) Si (E_n) es una sucesión creciente de elementos de S, entonces:[3]

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu(E_n).$$

b) Si (F_n) es una sucesión decreciente de elementos de S, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Si además $\mu(F_k) < +\infty$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ entonces se tiene la igualdad.

Demostración.

a) Si $\mu(E_n) = +\infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces ambos miembros de la expresión son iguales a $+\infty$. Así pues, supondremos que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $E_0 = \emptyset$ y $G_k = E_k - E_{k-1}$ $(k \geq 1)$; entonces (G_n) es una sucesión de elementos ajenos en S tal que:

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

[3] De aquí en adelante, la notación: $\lim\limits_{n\uparrow\infty}$ significa que el límite es el de una **sucesión creciente**, análogamente con $\lim\limits_{n\downarrow\infty}$.

y por lo tanto:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_k.$$

Usando la σ-aditividad y la sustractividad de μ obtenemos:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(G_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Finalmente, basta observar que por la monotonía de μ, el límite es el de una sucesión creciente.

b) Claramente $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leq \mu(F_n) \text{ para todo } n$$

y como la sucesión $(\mu(F_n))$ es decreciente, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Supongamos que $\mu(F_n) < +\infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, sea n_0 el primer natural con dicha propiedad. Definimos $E_k = F_{n_0} - F_{n_0+k}$, entonces (E_k) es una sucesión creciente de elementos de S con $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = F_{n_0} - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Se sigue del inciso a) y de la sustractividad de μ que:[4]

$$\mu(F_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\uparrow\infty} \mu(E_k)$$

[4] Si $\mu(F_n) = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es posible tener la desigualdad estricta en b) como lo muestra el siguiente ejemplo: $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ = medida de conteo y $F_n = \{n, n+1, \dots\}$.

$$= \mu(F_{n_0}) - \lim_{k\downarrow\infty} \mu(F_{n_0+k}) = \mu(F_{n_0}) - \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Pero $\mu(F_{n_0})$ es finito por lo que podemos restarlo y concluir que:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

□

Corolario 3.5. Sean (X,S) un espacio medible, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida y (E_n) una sucesión arbitraria de elementos de S, entonces:

a) $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$

b) Si además $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$, entonces:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(E_n) \leq \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n)$$

(Ver los ejercicios (32) y (33)).

Otra propiedad más de las medidas, es la **σ-sub-aditividad**, la cual se describe en la siguiente:

Proposición 3.6. Sea (X,S) un espacio medible y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida. Si (A_n) es una sucesión de elementos de S, entonces:[5]

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demostración. Sea $E_1 = A_1$ y $E_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ si $k \geq 2$, entonces (E_k) es una sucesión disjunta con $E_n \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (Ver el ejercicio (1)), por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

[5] Claramente toda medida es también finito sub-aditiva.

3. Espacios de medida

Definición 3.7. Un **espacio de medida** es una terna (X, S, μ), en la que (X, S) es una espacio medible y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida.

Definición 3.8. Sea (X, S, μ) un espacio de medida, denotaremos por $\mathcal{N}(\mu)$ a la clase de elementos E de S tales que $\mu(E) = 0$, los cuales llamaremos conjuntos **μ-nulos**. Observamos que por la **σ-subaditividad** de μ,

$$\mathcal{N}(\mu) = \{E \in S : \mu(E) = 0\}$$

es un σ-anillo de subconjuntos de X.

Definición 3.9. Un espacio de medida (X, S, μ) se llama **completo**, si siempre que $E \in \mathcal{N}(\mu)$ y $F \subset E$, entonces $F \in S$ (en cuyo caso, también se tendrá que $F \in \mathcal{N}(\mu)$).

Una definición alternativa que aclara el término de completez de un espacio de medida es la siguiente:

Si $E_1 \subset F \subset E_2$ con E_1, E_2 elementos de S tales que: $\mu(E_1 - E_2) = 0$, entonces $F \in S$.

Si (X, S, μ) es un espacio de medida incompleto, es posible construir un nuevo espacio de medida **completo** $(X, \overline{S}, \overline{\mu})$ tal que $S \subset \overline{S}$ y $\overline{\mu}|_S = \mu$ llamado la **μ-compleción** de (X, S, μ) y que consiste en considerar la σ-álgebra $\overline{S}$ generada por S junto con los subconjuntos de los elementos de $\mathcal{N}(\mu)$ y a $\overline{\mu}$ la extensión "natural" de μ sobre la nueva σ-álgebra (ver el ejercicio (36)).

Definición 3.10. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $P(x)$ una proposición referente a $x \in X$. Decimos que $P(x)$ es cierta **casi dondequiera relativa a** μ (abreviado (c.d. rel. μ)) si existe $E \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que $P(x)$ es cierta si $x \in X - E$.

Observe que lo anterior **no** significa que $\{x \in X : P(x) \text{ es falso}\} \in \mathcal{N}(\mu)$ pues podría no pertenecer a S. Sin embargo si (X, S, μ) es completo entonces $\{x \in X : P(x) \text{ es falso }\} \in \mathcal{N}(\mu)$ equivale a que $P(x)$ es cierta (c.d. rel. μ).

Ejemplo 3.11.

a) Sean $f, g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones, el escribir: $f \leq g$ (c.d. rel. μ) significa que existe $E \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que:

$$f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in X - E.$$

Es claro que $f = g$ (c.d. rel. μ) equivale a $f \leq g$ (c.d. rel. μ) y $g \leq f$ (c.d. rel. μ) y además si $f \leq g$ (c.d. rel. μ) y $g \leq h$ (c.d. rel. μ) entonces $f \leq h$ (c.d. rel. μ).

Un caso particular interesante es el siguiente: Si $F, G \subset X$, entonces $\chi_F = \chi_G$ (c.d. rel. μ) si y sólo si $F \Delta G \subset E$ para algún $E \in \mathcal{N}(\mu)$. Esto puede establecerse recordando que $\chi_F(x) \neq \chi_G(x) \Leftrightarrow x \in F \Delta G$.

b) Supongamos que (X, S, μ) es completo, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es S-medible y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es tal que $g = f$ (c.d. rel. μ) entonces g es S-medible.

Demostración. Sea $E = \{x \in X : g(x) \neq f(x)\}$, por completez $E \in \mathcal{N}(\mu)$. Si $c \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\{x \in X : g(x) > c\} = (\{x \in X : f(x) > c\} \cup \{x \in E : g(x) > c\}) \\ - \{x \in E : g(x) \leq c\}$$

El primer conjunto pertenece a S por ser f S-medible, el segundo y el tercero por ser subconjuntos de $E \in \mathcal{N}(\mu)$.

$\square$

c) Sea (f_n) una sucesión de funciones tales que $(f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}$. El decir: (f_n) converge (c.d. rel. μ) significa existe $E \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que $(f_n(x))$ converge para todo $x \in X - E$.

En otros casos el concepto (c.d. rel. μ) quedará claro según el contexto del que se trate. Por simplicidad en la notación y siempre que no se preste a confusión escribiremos solamente (c.d.).

CAPÍTULO 4

La integral de funciones medibles no negativas

1. Introducción

En las páginas anteriores desarrollamos los elementos indispensables para definir la integral de Lebesgue para funciones medibles no-negativas, lo cual hacemos en este cápitulo, asi como establecer algunas de sus propiedades fundamentales. Se obtiene el importante teorema de la convergencia monótona (T.C.M.) que usaremos de manera frecuente en lo que sigue y del cual se derivarán otros teoremas de convergencia. Se hace una comparación con la integral de Riemann.

Definición 4.1. Sea (X, S, μ) un espacio de medida fijo. Denotaremos por

$$\mathbb{M}(X, S) \quad \text{y} \quad \mathbb{M}^+(X, S)$$

al conjunto de funciones reales $f : X \to \mathbb{R}$ que son S-medibles y al subconjunto de éste consistente de las funciones no-negativas, respectivamente. De manera análoga definimos

$$\overline{\mathbb{M}}(X, S) \quad \text{y} \quad \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$$

para funciones extendidas que son S-medibles.

Empezaremos definiendo la integral para funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ a partir de la noción de integral para funciones simples en $\mathbb{M}^+(X, S)$.

Definición 4.2. Sea $s : X \to \mathbb{R}$ una función S-simple y **no-negativa**. Sea $s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$ su descripción canónica (ver 2.5.3). Definimos la **integral de**

s con respecto a la medida μ, denotada por $\int s\, d\mu$, como el número real no-negativo, posiblemente extendido, dado por:

$$\int s\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j).$$

La definición anterior tiene la desventaja de requerir la descripción canónica de s, sin embargo será posible eliminar esta restricción (ver 4.4) en cuanto establezcamos las siguientes propiedades:

Proposición 4.3. Sean $s, t \in \mathbb{M}^+(X, S)$ y $c \geq 0$ dados, entonces:

1) $\int cs\, d\mu = c \int s\, d\mu$.

2) $\int (s+t) d\mu = \int s\, d\mu + \int t\, d\mu$.

Demostración.

1) Si $c = 0$, entonces $cs = 0\chi_X$ asi que $\int cs\, d\mu = 0\mu(X) = 0 = c\int s\, d\mu$.

Si $c > 0$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$ es la descripción canónica de s, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} c\alpha_j \chi_{E_j}$$

es la descripción canónica de cs, asi pues:

$$\int cs\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c\alpha_j \mu(E_j) = c\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) = c\int s\, d\mu.$$

2) Escribimos a s y t en su forma canónica:

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j} \text{ y } t = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{F_k}.$$

luego entonces $s + t$ admite la siguiente representación:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (\alpha_j + \beta_k)\chi_{E_j \cap F_k}$$

la cual podría no ser la canónica. Sean $c_1, \ldots, c_p$ los distintos números reales del conjunto

$$\{\alpha_j + \beta_k : j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m\}$$

y

$$G_l = \bigcup \{E_j \cap F_k : \alpha_j + \beta_k = c_l\}, \quad l = 1, \ldots, p$$

Es claro que $\mu(G_l) = \sum\limits_{(l)} \mu(E_j \cap F_k)$, en donde la notación $\sum\limits_{(l)}$ significa que la suma se extiende sobre las parejas (j, k) tales que $\alpha_j + \beta_k = c_l$. En estos términos, la descripción canónica de $s + t$ esta dada por:

$$\sum_{l=1}^{p} c_l \chi_{G_l}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int (s+t) d\mu &= \sum_{l=1}^{p} c_l \mu(G_l) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{(l)} c_l \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{l=1}^{p}\sum_{(l)} (\alpha_j + \beta_k)\mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (\alpha_j + \beta_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k) = \int s\, d\mu + \int t\, d\mu
\end{aligned}$$

□

Por inducción, es posible generalizar 4.3.2 para cualquier número finito de funciones simples en $\mathbb{M}^+(X, S)$.

Proposición 4.4. Sea $s = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{F_k}$ una función s-simple con los $\beta_k > 0$ no necesariamente diferentes y los $F_k \in S$ no necesariamente disjuntos, entonces:

$$\int s\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k).$$

Demostración. Definimos m funciones s-simples no negativas, mediante su descripción canónica:

$$s_k = \beta_k \chi_{F_k} + 0\chi_{X-F_k} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

entonces $s = s_1 + \cdots + s_m$ y por la proposición anterior e inducción:

$$\int s\, d\mu = \int s_1\, d\mu + \cdots + \int s_m\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k).$$

□

Ejemplo 4.5. Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ igual a la medida de conteo (ver 3.2.2) y (α_n) una sucesión de números reales no-negativos dada. Para $k \in \mathbb{N}$ definimos $s_k : X \to \mathbb{R}$ S-simple como sigue:

$$s_k(j) = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } 1 \leq j \leq k. \\ 0 & \text{si } k < j. \end{cases}$$

$$\text{i.e. } s_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{\{j\}} + 0\chi_{\{k+1,k+2,\ldots\}}.$$

Asi pues $\int s_k\, d\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ (= k-ésima suma parcial de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$).

El poder escribir sumas parciales de series como integrales sobre espacios adecuados nos permitirá concluir una gran variedad de resultados sobre series a partir de los correspondientes para integrales.

Definición 4.6. Sea $f \in \widetilde{\mathbb{M}^+}(X, S)$ fija, denotamos por $\underline{S}(f) = \{s \in \mathbb{M}^+(X, S) : s$ es simple y $s \leq f\}$. Definimos la **integral de f con respecto a μ**, denotada $\int f\, d\mu$, como el número real no-negativo, posiblemente extendido, dado por:

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\}$$

Observe que $\underline{S}(f) \neq \emptyset$, pues $0 \leq f$. Además si $f, g \in \mathbb{M}^+(X, S)$ son tales que $f \leq g$ entonces $\underline{S}(f) \subseteq \underline{S}(g)$ y en consecuencia $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Es necesario probar que la definición 4.6 realmente extiende la noción de integral dada en 4.2 a una familia más amplia de funciones, i.e. hay que verificar que ambas coinciden en el caso en el que f sea S-simple.

Proposición 4.7. Sea $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$ la descripción canónica de una función simple en $\mathbb{M}^+(X, S)$, entonces:

$$\sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) \text{ (en donde } \int s\, d\mu \text{ es como en 4.2)}$$

Demostración. Como $f \in \underline{S}(f)$,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) = \int f\, d\mu \leq \sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\}.$$

Inversamente sea $s \in \underline{S}(f)$ arbitraria con descripción canónica

$$s = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{F_k}.$$

Como $s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, se tiene que $\beta_k \leq \alpha_j$ si $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ de donde obtenemos:

$$\beta_k \mu(E_j \cap F_k) \leq \alpha_j \mu(E_j \cap F_k).$$

Ahora bien, escribimos:

$$s = \sum_{j,k} \beta_k \chi_{E_j \cap F_k}, \quad f = \sum_{j,k} \alpha_j \chi_{E_j \cap F_k},$$

y de 4.4 concluimos que:

$$\int s\, d\mu = \sum_{j,k} \beta_k \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) = \int f\, d\mu.$$

$$\text{de donde } \sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\} \leq \int f\, d\mu.$$

□

El siguiente resultado tiene cierta analogía con la integral de Riemann y aclara cuales son las funciones que son suceptibles de ser integradas, pero antes:

Definición 4.8. Para $f \in \mathbb{M}^+(X,S)$ **acotada,** definimos

$$\overline{S}(f) = \{t \in \mathbb{M}^+(X,S) : t \text{ es simple y } f \leq t\}.$$

Observe que $\overline{S}(f) \neq \emptyset$.

Teorema 4.9. Sea (X,S,μ) un espacio de medida finita y $f : X \to \mathbb{R}$ no-negativa y acotada.

a) Si $f \in \mathbb{M}^+(X,S)$, entonces:

$$\inf\left\{\int t\, d\mu : t \in \overline{S}(f)\right\} = \sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\} \qquad (4.1)$$

b) Inversamente, si se da la igualdad (4.1) y (X,S,μ) es completo (ver 3.10) entonces: $f \in \mathbb{M}^+(X,S)$. O bien, si (X,S,μ) no es completo, $f \in \mathbb{M}^+(X,\overline{S})$ en donde $\overline{S}$ es la μ-compleción de S.

Demostración.

a) Si $s \in \underline{S}(f)$ y $t \in \overline{S}(f)$, entonces $s \leq t$ y obtenemos que

$$\int s\, d\mu \leq \int t\, d\mu.$$

Por lo tanto, $\sup\left\{\int s\, d\mu : \in \underline{S}(f)\right\} \leq \inf\left\{\int t\, d\mu : t \in \overline{S}(f)\right\}$

Sea $M > 0$ tal que $0 \leq f(x) < M$ para todo $x \in X$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1,\ldots,n\}$ definimos:

$$E_k(n) = \left\{x \in X : \frac{(k-1)M}{n} \leq f(x) < \frac{kM}{n}\right\} \in S.$$

Sean $s_n \in \underline{S}(f)$, $t_n \in \overline{S}(f)$, dadas por:

$$s_n = \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\chi_{E_k(n)} \quad \text{y} \quad t_n = \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}k\chi_{E_k(n)}$$

Entonces:

$$0 \leq \inf\left\{\int t\, d\mu : t \in \overline{S}(f)\right\} - \sup\left\{\int s\, d\mu : s \in \underline{S}(f)\right\}$$

$$= \int t_n\, d\mu - \int s_n\, d\mu = \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k(n)) = \frac{M}{n}\mu(X).$$

Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitraria y $\mu(X) < +\infty$, obtenemos la igualdad.

b) Como se da la igualdad, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $s_n \in \underline{S}(f)$ y $t_n \in \overline{S}(f)$ tales que:

$$\int t_n\, d\mu - \int s_n\, d\mu < \frac{1}{n}$$

Sean $t_* = \inf t_n$ y $s^* = \sup s_n$. Podemos suponer que $(t_n(x))$ es una sucesión acotada para todo $x \in X$, entonces por 2.8, s^* y $t_* \in \mathbb{M}^+(X,S)$ y $s^* \leq f \leq t_*$.

Sea $N = \{x \in X : t_* - s^* > 0\} \in S$, entonces

$$N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m \quad \text{con} \quad N_m = \left\{x \in X : t_* - s^* \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

el cual a su vez esta contenido en

$$N_m(n) = \left\{x \in X : t_n(x) - s_n(x) \geq \frac{1}{m}\right\} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Probaremos que $\mu(N_m) = 0$ para todo m, de donde concluiremos $\mu(N) = 0$.

Por construcción: $1 \leq m(t_n(x) - s_n(x)) \Leftrightarrow x \in N_m(n)$, así que:

$$\chi_{N_m(n)} \leq m\chi_{N_m(n)}(t_n(X) - s_n(X)) \in \mathbb{M}^+(X,S),$$

entonces:

$$\mu(N_{m(n)}) = \int \chi_{N_{m(n)}}\, d\mu = m\int \chi_{N_{m(n)}}(t_n - s_n)\, d\mu \leq m\int (t_n - s_n)\, d\mu.$$

Pero por 4.3.2

$$\int s_n\, d\mu + \int (t_n - s_n)\, d\mu = \int t_n\, d\mu$$

$$\Rightarrow m\int (t_n - s_n)\, d\mu = m\left(\int t_n\, d\mu - \int s_n\, d\mu\right) < \frac{m}{n}.$$

Así $\mu(N_m(n)) \leq \frac{m}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(N_m) = 0$.

Por lo tanto $t^* = s_*$ (c.d. rel. μ) y en consecuencia $t^* = f$ (c.d. rel. μ) también. Como (X, S, μ) es completo se sigue de 3.11 b) que f es S-medible.

□

Definición 4.10. Sean (X, S, μ) y $f \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ dados. Para cada $E \in S$, definimos la **integral de f con respecto a** μ **en** E, denotada por $\int_E f \, d\mu$, como el número real, posiblemente extendido, dado por:

$$\int_E f \, d\mu = \int (f \cdot \chi_E) \, d\mu.$$

Observe que si $E = X$, esta noción de integral se reduce a la dada en 4.6. Además si $E, F \in S$ y $E \subset F$, entonces: $f \cdot \chi_E \leq f \cdot \chi_F$ (pues $f \geq 0$) y por 4.6:

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$$

Esta es la propiedad de monotonía con respecto al conjunto sobre el que se integra. También si $f, g \in \overline{M^+}(X, S)$ y $f = g$ (c.d. rel. μ) entonces $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Finalmente es claro que si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f \, d\mu = 0 \quad \text{para todo } f \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$$

Ejemplo 4.11. Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ la medida de conteo y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no-negativa, entonces $\int_E f \, d\mu = \sum_{n \in E} f(n)$ para todo $E \subset \mathbb{N}$, en donde la suma vacía se define como cero.

Demostración. Como $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ toda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es S-medible. El caso $E = \emptyset$ es inmediato pues

$$\int_E f \, d\mu = \int f \cdot \chi_E \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Sea $E \subset \mathbb{N}$ no vacío fijo. Si $\#(E) < +\infty$ entonces $f \cdot \chi_E$ es S-simple, no negativa y $\int_E f \, d\mu = \sum_{n \in E} f(n)$ (ver 4.5). Si $\#(E) = +\infty$, definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ una función S-simple como sigue: $s_k = 0$ si $E \cap \{1, \ldots, k\} = \emptyset$ y en caso contrario,

$$s_k(j) = f(j) \text{ si } j \in E \cap \{1, \ldots, k\}$$

Es claro que

$$s_k \in \underline{S}(f \cdot \chi_E) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y}$$

$$\sum_{j \in E \cap \{1, \ldots, k\}} f(j) = \int s_k \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{así pues } \sum_{n \in E} f(n) \leq \int_E f \, d\mu.$$

Para la desigualdad que resta, basta considerar sólo el caso en el que $\sum_{n \in E} f(n) < +\infty$. Sea $s \in \underline{S}(f \cdot \chi_E)$ arbitraria, como s solamente toma un número finito de valores, al menos uno de ellos es tomado un infinidad de veces i.e. existe $F \subset E$ infinito tal que $s(n) = \alpha$ para todo $n \in F$, entonces:

$$0 \leq \alpha \#(F) = \sum_{n \in F} \alpha = \sum_{n \in F} s(n) \leq \sum_{n \in F} f(n)$$

$$\leq \sum_{n \in E} f(n) < +\infty, \text{ de donde } \alpha = 0.$$

Asi pues, todo valor positivo de s es tomado solamente un número finito de veces, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que: $s(j) = 0$ para todo $j > k$ y en consecuencia $s \leq s_k$.

Lo anterior implica que

$$\int s \, d\mu \leq \int s_k \, d\mu = \sum_{j \in E \cap \{1, \ldots, k\}} f(j) \leq \sum_{n \in E} f(n) \quad \text{para todo } s \in \underline{S}(f \cdot \chi_E)$$

lo que termina la prueba.

□

El ejemplo anterior muestra lo tedioso que puede resultar el emplear directamente la definición 4.6 aún en casos elementales por lo que se vuelve indispensable un método alternativo que facilite el cálculo de integrales. Necesitamos un resultado preliminar de interés independiente. (ver el ejercicio (42) para una generalización).

Teorema 4.12. Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $s \in \mathbb{M}^+(X, S)$ simple dada. Definimos $\mu_s : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue: $\mu_s(E) = \int_E s \, d\mu$, entonces μ_s es una medida.

Demostración. Sea $s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$ la descripción canónica de s. Es claro que

$$\mu_s(E) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_{E_j}(E)$$

o sea μ_s es una combinación lineal no-negativa de medidas y es por lo tanto una medida (ver 3.4 4) y 5)).

□

2. El teorema de la convergencia monótona

El teorema que continúa es de gran importancia en la teoría de integración y se debe a B. Levi (1875 - 1961). Algunas condiciones menos restrictivas que nos permitan permutar el límite con la integral se darán más adelante.

Teorema 4.13. (De la convergencia monótona (1906)) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión no decreciente de funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ tal que converge a f en X, entonces:

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \uparrow \infty} \int_E f_n \, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Demostración. Por 2.16 $f \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ y $\int_E f \, d\mu$ está definida para todo $E \in S$. Por otro lado como $f_n \cdot \chi_E \leq f_{n+1} \cdot \chi_E \leq f \cdot \chi_E$, entonces la sucesión $(\int_E f_n \, d\mu)$ es no decreciente y acotada superiormente por $\int_E f \, d\mu$, por lo que sólo resta probar que $\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \uparrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$.

Para $\alpha \in (0, 1)$ y $s \in \underline{S}(f)$ fijas definimos: $E_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$, entonces $E_n \in S$ y $E_n \subset E_{n+1}$, y como $\alpha s \leq f$ y $f_n \uparrow f$ se tiene que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, además:

$$\alpha \int_{E_n} s \, d\mu = \int_{E_n} \alpha s \, d\mu \leq \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu$$

Como s es S-simple se sigue de 4.12 y de 3.5 a) que:

$$\alpha \int_E s \, d\mu = \alpha \lim_{n \uparrow \infty} \int_{E_n} s \, d\mu \leq \lim_{n \uparrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Como $\alpha \in (0, 1)$ es arbitraria, se tiene que

$$\int_E s \, d\mu \leq \lim_{n \uparrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Tomando el supremo sobre $s \in \underline{S}(f)$ se obtiene el resultado.

□

Observaciones 4.14. Sea $f \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ fija, entonces por 2.14, la función f es el límite de una sucesión no-decreciente de funciones S-simples (s_n) en $\mathbb{M}^+(X, S)$ y por el teorema anterior:

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \uparrow \infty} \int_E s_n \, d\mu \quad (E \in S).$$

La igualdad anterior simplifica la definición de 4.6 y podía haberse usado como definición alternativa pues se puede probar que el valor no depende de la sucesión aproximadora (s_n).

Corolario 4.15. Sean $f, g \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$, $c \geq 0$ y $E \in S$

i) $\int_E c f \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$.

ii) $\int\limits_E (f+g)\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu + \int\limits_E g\, d\mu$.

iii) $\int\limits_{F\cup G} f\, d\mu = \int\limits_F f\, d\mu + \int\limits_G f\, d\mu$ para $F, G \in S$ ajenos entre sí.

Demostración.

i) Sea (s_n) una sucesión de funciones S-simples no-negativas con $s_n \uparrow f$ entonces (cs_n) es una sucesión no-decreciente de funciones S-simples no negativas tal que converge a $cf \cdot \chi_E$, entonces por 4.3 y 4.13 se sigue el resultado.

ii) Si (s_n) y (t_n) son funciones S-simples no-negativas con $s_n \uparrow f$ y $t_n \uparrow g$ entonces, $s_n + t_n$ es una sucesión no-decreciente de funciones S-simples no-negativas que convergen a $f+g$ y por 4.3 y por 4.13 se sigue el resultado.

iii) Como $f\cdot\chi_{F\cup G} = f\cdot\chi_F + f\cdot\chi_G$, el resultado se sigue del inciso anterior.

□

Observe que el inciso (iii) es cierto si sólo se tiene $\mu(F\cap G) = 0$.

Corolario 4.16. Sea (f_k) una sucesión de funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ y sea $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, entonces

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E f_k\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Demostración. Sea $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces (g_n) es una sucesión no-decreciente tal que $f = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ y $\int\limits_E g_n\, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int f_k(x)\, d\mu$ de donde se sigue el resultado.

□

El resultado anterior tiene una aplicación inmediata a series dobles de números reales extendidos no-negativos tomando a $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu =$ la medida de conteo. (Enúncielo).

3. El lema de Fatou

El teorema de la convergencia monótona tiene la desventaja de ser aplicable sólo bajo condiciones muy restrictivas (ver el ejercicio (48)), sin embargo un corolario de éste, conocido como el lema de P. Fatou (1878-1929), puede ser usado con sucesiones de funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ no necesariamente convergentes, pero su conclusión es más débil que la de 4.13. Es interesante hacer notar que este resultado fue probado por Fatou (en su tesis doctoral (1906)) en el contexto de series trigonométricas.

Corolario 4.17. (Lema de Fatou) Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ entonces:

$$\int\limits_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S$$

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\} \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ entonces $g_m \le f_n$ si $n \ge m$ y por monotonía:

$$\int\limits_E g_m\, d\mu \le \int\limits_E f_n\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S, \text{ si } n \ge m$$

Así que $\int\limits_E g_m\, d\mu \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\, d\mu$ para todo $E \in S$ y para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, la sucesión (g_m) es monótona creciente y satisface que $\lim\limits_{m\nearrow\infty} g_m = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$. Aplicando 4.13 obtenemos que:

$$\int\limits_E \left(\varliminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{m\nearrow\infty} \int\limits_E g_m\, d\mu$$

el cual no excede a $\varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\, d\mu$.

□

Observaciones 4.18.

a) Se ha exhibido al lema de Fatou como consecuencia del teorema de la convergencia monótona. Suponiendo la validez del lema de Fatou es posible probar el teorema de la convergencia monótona (ver el ejercicio (49)).

b) La desigualdad estricta puede darse en 4.17 aún si **ningún, un o ambos** límites existen (v.gr.): Sea $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ = medida de conteo

i) Si $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$f_n(j) = \begin{cases} \chi_P(j) & \text{si } j \text{ es par} \\ \chi_{\mathbb{N}-P}(j) & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$

donde $P = \{2, 4, \ldots\}$, entonces

$$\int_{\{1,2,3\}} \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \varliminf_{n\to\infty} \int_{\{1,2,3\}} f_n \, d\mu = 1.$$

ii) $\int_{\{1,2\}} \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \int_{\{1,2\}} f_n \, d\mu = 1$ con f_n como en i).

iii) Ahora si $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ está dada por: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{\{n,\ldots,2n-1\}}$, entonces

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 1.$$

c) El lema de Fatou puede extenderse para el caso en el que exista $g \in \mathbb{M}^+(X, S)$ con $\int g \, d\mu < +\infty$ y tal que $f_n \geq -g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $(f_n \in \overline{\mathbb{M}}(X, S))$ (ver los ejercicios (48 ii)) y (50)).

Un hecho muy útil es el siguiente:

Teorema 4.19. Sean $f \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ y $E \in S$ dados, entonces:

$$\int_E f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0 \quad (\text{i.e. } f = 0 \text{ (c.d. rel. } \mu) \text{ en } E.)$$

Demostración.

$\Rightarrow]$

Claramente $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde $E_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Por σ-subaditividad de μ será suficiente probar que $\mu(E_n) = 0$. Por construcción $f \cdot \chi_{E_n} \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n} \geq 0$ y por la monotonía de la integral se tiene que:

$$0 = \int_E f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu \geq \frac{\mu(E_n)}{n} \geq 0$$

por lo tanto $\mu(E_n) = 0$

$\Leftarrow]$

Sean $F = \{x \in E : f(x) > 0\}$ y $G = \{x \in E : f(x) = 0\}$, entonces por 4.15 inciso (c)

$$\int_E f \, d\mu = \int_F f \, d\mu + \int_G f \, d\mu = 0.$$

$\square$

4. Comparación con la integral de Riemann

Sean $X = [a, b]$ $(a < b \text{ en } \mathbb{R})$, $S = \mathbb{B}_{[a,b]}$ $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue en S y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no-negativa y acotada.

A cada partición $\mathcal{P} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ de $[a, b]$ le asociamos la suma superior $\overline{S} = \overline{S}(\mathcal{P}, f)$ e inferior $\underline{S} = \underline{S}(\mathcal{P}, f)$ de Riemann-Darboux dadas por:

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) M_i \quad \text{y} \quad \underline{S} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) m_i$$

donde

$$M_i = \sup\{f(t) : t \in (t_{i-1}, t_i)\} \quad \text{y} \quad m_i = \inf\{f(t) : t \in (t_{i-1}, t_i)\}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

A continuación definimos la integral superior de Riemann $\overline{R}\int_a^b f \, dx$ y a la integral inferior de Riemann $\underline{R}\int_c^d f \, dx$ como sigue: $\overline{R}\int_a^b f \, dx = \inf\{\overline{S}(\mathcal{P}, f) :$ $\mathcal{P}$ es una partición finita de $[a, b]\}$ y $\underline{R}\int_c^d f \, dx = \sup\{\underline{S}(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P}$ es una partición finita de $[a, b]\}$.

En estos términos diremos que f es Riemann-integrable si y sólo si la integral superior de Riemann es igual a la integral inferior de Riemann. En ese caso denotamos por $R\int_a^b f(x) \, dx$ al valor común y la llamaremos la **integral de Riemann** de f en $[a, b]$.

El teorema de H.Lebesgue (1875-1941) que a continuación enunciamos (ver el ejercicio (55)) caracteriza totalmente a las funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann-integrables y que pone fin a varias décadas de investigación sobre la estructura del conjunto de las discontinuidades de f y además exhibe a la integral de Lebesgue como una extensión de la integral de Riemann. Un ejemplo de esto último es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

entonces por la densidad de los racionales e irracionales en $[a,b]$, se tiene que

$$\overline{R}\int_a^b f(x)\,dx = b-a \text{ y } \underline{R}\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

por lo que f no es Riemann integrable, pero evidentemente f es Lebesgue integrable (con integral igual a cero).

Teorema 4.20. (H. Lebesgue) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, entonces:

a) f es Riemann-integrable si y sólo si f es continua (c.d. rel λ).[6]

b) Si f es Riemann-integrable, entonces f es Lebesgue-medible y

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda.$$

En el ejercicio (55) se sugiere para su demostración, la construcción de dos funciones semicontinuas (y en consecuencia Borel-medibles) g y h tales que: $g \le f \le h$, con igualdad sólo en los puntos de continuidad de f y con

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \underline{R}\int_a^b f(x)\,dx \le \overline{R}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} h\,d\lambda.$$

[6] La σ-álgebra de Lebesgue en $[a,b]$ es la λ-compleción de $\mathbb{B}_{[a,b]}$.

La integrabilidad de Riemann de f equivale a la igualdad (c.d. rel λ) de g y h.

Por otro lado el ejercicio (56) exhibe un ejemplo de una función no-acotada $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ cuya integral impropia de Riemann de segunda especie existe y la cual no es integrable en el sentido de Lebesgue. En el ejercicio (57) se da una condición sobre la función para que integrales impropias de primera especie que convergen sean igual a la integral de Lebesgue. Tal condición puede adaptarse para la de segunda especie también.

Veamos finalmente una aplicación de 4.16 y de 4.20.

Ejemplo 4.21. Sean $X = [0,1]$, $S = \mathbb{B}_{[0,1]}$, $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue, $\alpha \ge 1$ y $\beta > 0$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua dada por:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta}$$

entonces:

$$R\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\beta}$$

Demostración. Es claro que

$$f(x) = x^{\alpha-1}(1 - x^\beta + x^{2\beta} - x^{3\beta} + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{si } x \in [0,1)$$

en donde $f_n(x) = (1-x^\beta)x^{\alpha-1+2n\beta} \ge 0$, así que por 4.16 tendremos que:

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} f_n\,d\lambda$$

Pero f_n y f son Riemann-integrables en $[0,1]$ así que por 4.20 tendremos:

$$R\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{[0,1]} f\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} f_n\,d\lambda$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha+2n\beta} - \frac{1}{\alpha+2(n+1)\beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\beta}$$

observe que en particular si $\alpha = 1 = \beta$ entonces:

$$\log(2) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

y si $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ entonces:

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

□

CAPÍTULO 5

El espacio de funciones integrables

1. Introducción

En este capítulo introduciremos el concepto de integral para una subclase de $\overline{\mathbb{M}}(X, S)$. Se establecerá la linealidad de la integral y probaremos varios resultados en los que es permisible el intercambio de la integral con el límite. Se extenderá la noción de integral para funciones S-medibles con valores complejos.

Definición 5.1. Sea (X, S, μ) un espacio de medida dado. Denotaremos por $\overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ a la clase de funciones $f \in \overline{\mathbb{M}}(X, S)$ tales que:

$$\int f^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{y} \quad \int f^- \, d\mu < +\infty$$

A dichas funciones las llamaremos **integrables con respecto a** μ. Para $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ y $E \in S$ dados ponemos:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

Observamos que $\int_E f^+ \, d\mu$ y $\int_E f^- \, d\mu$ son finitas para todo $E \in S$ también, por lo que la diferencia tiene sentido y prueba que $f \cdot \chi_E \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$. Si $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ entonces se sigue del ejercicio 43) que f^+ y f^- son finitas (c.d. rel. μ).

Denotaremos por $\mathcal{L}_1(X, S, \mu)$ a la subclase de funciones μ-integrables que toman valores en $\mathbb{R}$.[7]

[7]Si $\int f^+ \, d\mu = +\infty$ ó $\int f^- \, d\mu = +\infty$, la diferencia $\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ también está definida y en ese caso escribimos: $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ también, sin embargo tal f ya no es integrable con respecto a μ.

Teorema 5.2. Sea (X, S, μ) un espacio de medida dado, entonces:

a) $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu) \Leftrightarrow |f| = f^+ + f^- \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$. En cuyo caso $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$

b) Si $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ y $g \in \overline{\mathbb{M}}(X, S)$ es tal que $|g| \leq |f|$, entonces $g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$.

Demostración.

a) $\Rightarrow]$
$|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ y $|f|^- = 0$ las cuales tienen integral finita.
$\Leftarrow]$
$\int f^+\, d\mu$, $\int f^-\, d\mu$ son ambas, menores o iguales que

$$\int (f^+ + f^-)\, d\mu = \int |f|^+\, d\mu < +\infty.$$

por lo tanto $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$. Además si $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ entonces:

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\right| \leq \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu$$

b) Como $g^+ \leq |f|$ y $g^- \leq |f|$, se tiene que

$$\int g^+\, d\mu < +\infty \text{ y } \int g^-\, d\mu < +\infty \text{ y por lo tanto } g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu).$$

□

Se deja como ejercicio para el lector el comprobar la siguiente afirmación: Si $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$, entonces

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| = \int_E |f|\, d\mu \Leftrightarrow \mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0 \quad \text{ó}$$

$$\mu(\{x \in E : f(x) < 0\}) = 0$$

i.e. f es no-negativa (c.d.) ó f es no-positiva (c.d.) en E (ver 4.19).

Antes de mostrar la linealidad de la integral es indispensable tener un resultado preliminar que elimine, de la definición 5.1 la necesidad de usar la parte positiva y negativa de la función.

Lema 5.3. Sea $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ dada. Si $f = f_1 - f_2$ (c.d.) con $f_1, f_2 \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$, $\int f_j\, d\mu < +\infty$ (j=1,2) entonces:

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f_1\, d\mu - \int_E f_2\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S$$

Demostración. Por hipótesis $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ (c.d.), entonces $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ (c.d.) y por 4.15 ii)

$$\int_E f^+\, d\mu + \int_E f_2\, d\mu = \int_E f_1\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu.$$

Como todas las integrales son finitas obtenemos restando que:

$$\int f\, d\mu = \int_E f_1\, d\mu - \int_E f_2\, d\mu.$$

□

Teorema 5.4. (Linealidad) Sean $f, g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ dados, entonces

$$\alpha f \text{ y } f + g \in \overline{\mathcal{L}}_1(X, S, \mu)$$

y

$$\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu \text{ y } \int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Demostración. El caso $\alpha = 0$ es elemental y se omite. Si $\alpha > 0$, entonces $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ entonces que si $\alpha < 0$ entonces $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ y $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$, en cualquier caso se sigue de 4.15 i) que $\alpha f \in \overline{\mathcal{L}}_1(X, S, \mu)$ y que $\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$.

Por otro lado:

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

en donde la definición de suma es como en 2.17. Usando el lema anterior obtenemos que:

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E (f^+ + g^+)\, d\mu - \int_E (f^- + g^-)\, d\mu$$

$$= \left(\int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu\right) + \left(\int_E g^+ \, d\mu - \int_E g^- \, d\mu\right)$$

$$= \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

□

Note que $(f+g)^+$ es en general, diferente de $f^+ + g^+$ y análogamente con la parte negativa.

Corolario 5.5. Sean $F, G \in S$ ajenos entre si y $f, g \in \overline{\mathcal{L}}_1(X, S, \mu)$ dados entonces:

a) $\int_{F \cup G} f \, d\mu = \int_F f \, d\mu + \int_G f \, d\mu$

b) $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ para todo $E \in S \Leftrightarrow f \leq g$ (c.d.).

c) $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ para todo $E \in S \Leftrightarrow f = g$ (c.d.).

Demostración.

a) Por hipótesis $\chi_{F\cup G} = \chi_F + \chi_G$ y por el teorema anterior

$$\int_{F\cup G} f \, d\mu = \int (f \cdot \chi_F + f \cdot \chi_G) \, d\mu$$

$$= \int f \cdot \chi_F \, d\mu + \int f \cdot \chi_G \, d\mu$$

$$= \int_F f \, d\mu + \int_G f \, d\mu.$$

b) $\Leftarrow]$
Sea $N \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - N$. Como $\mu(N) = 0$, entonces

$$\int_N f \, d\mu = 0 = \int_N g \, d\mu.$$

Por el teorema anterior, el inciso a) de éste y dado que $(g-f)\chi_{E-N} \in \overline{\mathbb{M}^+}(X, S)$ se tiene:

$$\int_E g \, d\mu = \int_{E-N} g \, d\mu = \int_{E-N} f \, d\mu + \int_{E-N} (g-f) \, d\mu \geq \int_{E-N} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

$\Rightarrow]$
Por el teorema anterior, la hipótesis equivale a: $\int_E (g-f) \, d\mu \geq 0$ para todo $E \in S$. Sea $N_k = \{x \in X : f(x) - g(x) > \frac{1}{k}\}$ $(k \in \mathbb{N})$ entonces:

$$0 \leq \int_{N_k} (g-f) \, d\mu \leq -\frac{1}{k}\mu(N_k).$$

por lo que necesariamente $\mu(N_k) = 0$ y lo mismo es cierto para

$$\{x \in X : g(x) < f(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$

por lo tanto $f \leq g$ (c.d.).

c) Es inmediato de (b) intercambiando los roles de f y de g.

□

Un caso particular importante de (b) es el siguiente:

$$\int_E f \, d\mu = 0 \quad \text{para todo } E \in S \Leftrightarrow f = 0 \text{ (c.d.)}.$$

2. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

El siguiente teorema y su generalización (ver el ejercicio (54)) además de ser poco restrictivos en sus hipótesis, son fuertes en lo que se refiere a las conclusiones por lo que sin duda son de los teoremas más importantes sobre sucesiones de funciones integrables y las sucesiones de sus integrales y en lo que resta haremos uso frecuente de ellos. Ambos resultados se deben a H. Lebesgue.

Teorema 5.6. (De la convergencia dominada de Lebesgue 1910). Sean (X, S, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones en $\overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ (c.d.rel. μ) para alguna $f \in \overline{\mathbb{M}}(X, S)$. Supongamos que existe $g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ (c.d.rel. μ) para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

a) $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$.

b) $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ para todo $E \in S$.

Demostración. Es claro que redefiniendo a las funciones f_n y f en un conjunto medible de medida cero (cambio que no alteraría a) y b)) se puede suponer que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $f_n \to f(x)$ para todo $x \in X$.

a) Como también $|f| \leq g$, se sigue de 5.2 b) que $f \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$.

b) Por hipótesis $g + f_n \geq 0$ por lo que podemos aplicar el lema de Fatou:

$$\int_E g\, d\mu + \int_E f\, d\mu = \int_E (g + f)\, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g + f_n)\, d\mu$$

$$= \int_E g\, d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu,$$

como $g \cdot \chi_E \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ obtenemos al cancelar $\int_E g\, d\mu$ que:

$$\int_E f\, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f\, d\mu.$$

Por otro lado $g - f_n \geq 0$, aplicando nuevamente el lema de Fatou obtenemos:

$$\int_E g\, d\mu - \int_E f\, d\mu = \int_E (g - f)\, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n)\, d\mu$$

$$= \int_E g\, d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu,$$

de donde se sigue que: $\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu$; la cual combinada con la desigualdad del párrafo anterior establecen el punto b).

□

Observaciones 5.7.

a) Un caso particular que aparece con frecuencia es el siguiente: La medida del espacio es **finita** y existe $k > 0$ constante tal que $|f_n| \leq k$ para todo n. Es claro que $g = k \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)$ y la conclusiones del teorema se satisfacen. En este contexto, el teorema 5.6 se conoce como el teorema de la **convergencia acotada**.

b) Para integrales de Riemann, en el que $X = [a, b]$, el teorema de la convergencia acotada (conocido como el teorema de Arzelà-Osgood (1897)) (Ver [L] pp 976-979) es más débil pues se exige que la función límite sea Riemann-integrable, hecho que no se sigue de suponer solamente que la convergencia es puntual.

c) La presencia de una función g que domine es indispensable aún si $\mu(X) < \infty$, por ejemplo: Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu : S \to \mathbb{R}$ dada por $\mu(E) = \sum_{j\in E} \frac{1}{2^j}$ ó 0 si $E = \emptyset$ (ver el ejercicio (27)). Sea $f_n = 2^n \chi_{\{n+1, n+2, \ldots\}}$, entonces:

$$\int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = 1 \quad \text{para todo } n \text{ y } f_n \to 0,$$

por lo que la conclusión del teorema 5.6 falla. Se deja al lector el verificar que no existe g integrable que domine a la sucesión.

Corolario 5.8. Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $a < b$ es $\mathbb{R}$ fijas. Si $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f^t : X \to \mathbb{R}$ dada por $f^t(x) = f(x, t)$ es S-medible para todo $t \in (a, b)$ y $f_x : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(t) = f(x, t)$ es continua para todo $x \in X$ y además existe $g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X, S, \mu)$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo x, t, entonces la función $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(t) = \int_X f^t\, d\mu \quad \text{es una función continua.}$$

Demostración. Sea $t_0 \in (a, b)$ arbitraria y (t_n) una sucesión contenida en (a, b) tal que $t_n \to t_0$. Si $f_n = f^{t_n}$, entonces: $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x) \to f^{t_0}(x)$ para todo $x \in X$, por continuidad.

Aplicando 5.6 directamente obtenemos:

$$F(t_0) = \int f^{t_0}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} F(t_n)$$

por lo tanto F es continua.

□

Aunque no es consecuencia de los teoremas de este capítulo, se invita al lector a demostrar que $g : X \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = \int\limits_a^b f_x(t)\, dt$ es S-medible (Recuerde que la integral de Riemann es el límite de sumas).

El siguiente resultado da algunas condiciones que garantizan la diferenciabilidad de F.

Corolario 5.9. Notación como en el corolario anterior. Supongamos ahora que existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $f^{t_0} \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe en $X \times (a,b)$ y que existe $g \in \overline{\mathcal{L}_1}(X,S,\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$, entonces F es diferenciable en t y $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu$.

Demostración. Sea $t \in (a,b)$ $t \neq t_0$ arbitraria, entonces por el teorema del valor medio existe s entre t_0 y t tal que:

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| = |t - t_0| \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right|$$

Así,

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + (b-a)g(x) = g_1(x)$$

como $g_1 \in \overline{\mathcal{L}_1}(X,S,\mu)$ lo anterior demuestra que $f^t \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ para todo $t \in (a,b)$.

Ahora sea $t \in (a,b)$ arbitraria y (t_n) una sucesion contenida en (a,b) tal que $t_n \to t$ y con $t_n \neq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $f_n : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_n(x) = \frac{f^{t_n}(x) - f^t(x)}{t_n - t},$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ para todo $x \in X$ por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t) : X \to \mathbb{R}$ es S-medible y además por una estimación similar a la del párrafo anterior

tenemos que: $|f_n| \leq g_1$. Se sigue de 5.6 que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu$$

por lo tanto F es diferenciable en (a,b) y $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu \quad (t \in (a,b))$.

□

3. Funciones integrables con valores complejos

Definición 5.10. Sea (X,S,μ) un espacio de medida, denotemos por $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X,S)$ al espacio de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ que son S-medibles. Definimos

$$\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X,S,\mu) = \{f \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X,S) : \Re f, \Im f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)\}$$

y para $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ y $E \in S$ ponemos

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E \Re f\, d\mu + i \int\limits_E \Im f\, d\mu.$$

Es inmediato comprobar que el teorema correspondiente a 5.4 es cierto pero ahora con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X,S,\mu)$, entonces decimos que f es integrable.

Análogamente a 5.2 tenemos:

Teorema 5.11.

a) $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X,S,\mu) \Leftrightarrow |f| = \left((\Re f)^2 + (\Im f)^2\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$. En cuyo caso:

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$$

b) Si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X,S,\mu)$ y $g \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X,S)$ es tal que $|g| \leq |f|$, entonces $g \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X,S,\mu)$

Demostración.

a) $\Rightarrow$]
Claramente $|f| \leq |\Re f| + |\Im f| \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)$ por lo tanto $|f| \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)$ por 5.2 b).
$\Leftarrow$]
Es evidente de las relaciones: $|\Re f|$, $|\Im f| \leq |f|$.

Si $\int f \, d\mu = 0$ no hay nada que hacer, así es que suponemos que la integral es diferente de cero. Sea $re^{i\theta} = \int f \, d\mu$ la representacion polar. Por la definicion 5.10 y por 5.4 tenemos que $r = \int e^{-i\theta} f \, d\mu$ asi que:

$$\left| \int f \, d\mu \right| = r = \int e^{-i\theta} f \, d\mu = \int \Re(e^{-i\theta} f) \, d\mu$$
$$\leq \int |e^{-i\theta} f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

b) Claramente $|\Re g|$, $|\Im g| \leq |g| \leq |f|$ y el resultado se sigue de 5.2.

$\square$

Observaciones 5.12.

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \int_E |f| \, d\mu \Leftrightarrow \text{existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu\{x \in E : f(x) \neq e^{i\theta} |f(x)|\} = 0$$

(i.e. la función f toma sus valores (c.d.) en E sobre un rayo que parte del origen)

Demostración.
$\Leftarrow$]
Claramente $\left| \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E e^{-i\theta} |f| \, d\mu \right| = \int_E |f| \, d\mu.$
$\Rightarrow$]
Si $\int_E f \, d\mu \neq 0$. escribimos $\int_E f \, d\mu = re^{i\theta}$, entonces como en la prueba de 5.11 tenemos:

$$\int_E \Re(e^{-i\theta} f) \, d\mu = \left| \int_E f \, d\mu \right| = \int_E |f| \, d\mu$$

y como $\Re(e^{-i\theta} f) \leq |f|$ se tiene que:

$$\mu \left\{ x \in E : \Re\left(e^{-i\theta} f(x)\right) \neq |f(x)| \right\} = 0$$

lo que equivale a:

$$\mu\{x \in E : e^{-i\theta} f(x) \neq |f(x)|\} = 0$$

y además prueba en este caso que

$$\theta = \arg\left(\int_E f \, d\mu \right) \quad \text{si} \quad \int_E f \, d\mu \neq 0. \quad \text{Si} \quad \int_E f \, d\mu = 0, \text{ tomamos } \theta = 0.$$

$\square$

El corolario 5.5 se extiende sin cambio alguno salvo en el inciso b) en el que ponemos en vez de f y g, sus módulos. El inciso c) se prueba examinando las partes reales e imaginarias de las integrales. Es claro cómo enunciar la versión compleja del teorema 5.6 y su prueba se reduce a examinar la partes reales e imaginarias.

CAPÍTULO 6

Los espacios clásicos de Banach

1. Introducción

En este capítulo introduciremos los espacios clásicos de Banach $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, así como algunas desigualdades importantes relacionadas con ellos. Estos espacios poseen propiedades destacadas y son de considerable interés en diversas áreas del análisis. Obtenemos como casos especiales diversos espacios de sucesiones.

Definición 6.1. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $p \in (0, +\infty)$ fijo. Definamos

$$\mathcal{L}_p(X, S, \mu) = \{f \in \mathbb{M}(X, S) : |f|^p \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)\}$$

Claramente

$$f \in \mathcal{L}_p(X, S, \mu) \Leftrightarrow \int |f|^p \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow |f|^p \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu).$$

Observe que $\int |f|^p \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (c.d.) (4.19).

Si no se presta a confusión escribiremos $\mathcal{L}_p(\mu)$ en vez de $\mathcal{L}_p(X, S, \mu)$.

Teorema 6.2. Si $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf y $f + g$ pertenecen a $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Demostración. La primera afirmación es evidente, para la segunda usamos la siguiente cadena de desigualdades válida para números reales a y b:

$$|a + b|^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

así que:

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) < +\infty.$$

por lo tanto $f+g \in \mathcal{L}_p(X,S,\mu)$.

□

La desigualdad que probamos a continuación es central en el desarrollo de los espacios $\mathcal{L}_p(\mu)$, es además una generalización de la desigualdad de Cauchy-Buniakowski-Schwarz. Fue probada originalmente por O. Hölder (1859-1937) para el producto interior usual de vectores en $\mathbb{R}^n$ y generalizado por F. Riesz (1880-1955) para funciones en $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Teorema 6.3. (Desigualdad de O. Hölder (1889) y F. Riesz (1910)) Sean (X,S,μ) un espacio de medida, $p\in(1,+\infty)$ y $q\in(1,+\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Si $f\in\mathcal{L}_p(\mu)$ y $g\in\mathcal{L}_q(\mu)$ son distintas de cero (c.d.) entonces

i) $fg\in\mathcal{L}_1(\mu)$.

ii) $\int|fg|\,d\mu \le \left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$.

iii) La igualdad en ii) ocurre si y sólo si existen constantes no-negativas, no ambas cero, A y B tales que: $A|f|^p=B|g|^q$ (c.d.)

Demostración. Partimos de la conocida desigualdad de J. Bernoulli:

$$(1+t)^p \ge 1+pt, \quad t\ge -1, \quad p>1$$

con igualdad si y sólo si $t=0$.

Sean $a\ge 0$ y $b>0$ tales que:

$$1+t=\left(\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}}\right).$$

Sustituyendo estos valores en la desigualdad de Bernoulli obtenemos:

$$\frac{a^p}{b^q}\ge 1+pab^{-\frac{q}{p}}-p$$

con igualdad si y sólo si $a^p=b^q$. Multiplicando por b^q en ambos lados de la desigualdad, ordenando los términos y usando la relación $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ obtenemos que:

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

con igualdad si y sólo si $a^p=b^q$ $(a\ge 0,\ b>0)$. El caso $b=0$ es evidente.

Procedamos a establecer el teorema.

i) Por lo ya probado,

$$\int|fg|\,d\mu\le\frac{1}{p}\int|f|^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int|g|^q\,d\mu<+\infty,$$

de donde $fg\in\mathcal{L}_1(\mu)$.

ii) Por hipótesis $\int|f|^p\,d\mu$ y $\int|g|^q\,d\mu$ son diferentes de cero.
Sean $h=\frac{|f|}{\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}$ y $k=\frac{|g|}{\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}$, entonces por la desigualdad ya obtenida:

$$\int hk\,d\mu\le\frac{1}{p}\int|h|^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int|k|^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

equivalentemente:

$$\int|fg|\,d\mu\le\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

iii) La igualdad en (ii) ocurre si y sólo si $\int hk\,d\mu=1\Leftrightarrow h^p=k^q$ (c.d) (ver 5.5.c)) $\Leftrightarrow\left(\int|g|^q\,d\mu\right)|f|^p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)|g|^q$ (c.d.).

□

Observe que la prueba del inciso anterior proporciona explícitamente los valores de A y de B. Notamos que si $f=0$ ó $g=0$ (c.d.) el teorema anterior es cierto también.

Para una generalización de la desigualdad de Hölder ver el ejercicio (61), y para un recíproco debido a F. Riesz (1910), (ver el ejercicio (78)). Los números p y q se llaman **exponentes (o índices) conjugados**.

Existe una versión de la desigualdad de Hölder que no usaremos, si $p\in(0,1)$ (en consecuencia su exponente conjugado $q\in(-\infty,0)$, (ver el ejercicio (72)). El caso $p=1$ y $q=+\infty$ se pospone hasta 6.16.

2. La desigualdad de Minkowski y el teorema de Riesz-Fischer

Teorema 6.4. (Desigualdad de Minkowski (1896)) Sean $p \in [1, +\infty)$ y $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ dadas, entonces:

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. El caso $p = 1$ es elemental y se omite. Por 6.2. $f + g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \int |f+g|^{p-1}|f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1}|g| \, d\mu.$$

Como $|f+g|^p \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces $|f+g|^{p-1} \in L_q(\mu)$, así, que por 6.3 obtenemos:

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \left[\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int |f+g|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Si $\int |f+g|^p \, d\mu = 0$ entonces la desigualdad de Minkowski se satisface trivialmente, y si $\int |f+g|^p \, d\mu > 0$, entonces dividiendo ambos lados de la última desigualdad entre este número y como $p = q(p-1)$, concluimos que:

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Examinando los puntos en la prueba anterior en donde aparecen desigualdades es fácil concluir, usando 6.3, que la igualdad ocurre en la desigualdad de Minkowski, con $p > 1$, si y sólo si existen C, D constantes no-negativas, no ambas cero, tales que:

$$Cf = Dg \quad \text{(c.d.)}.$$

Si $p = 1$, entonces la igualdad ocurre si y sólo si existe $\rho \in \mathbb{M}^+(X, S)$ tal que $\rho f = g$ (c.d) en el conjunto $\{x \in X : f(x)g(x) \neq 0\}$.

Se deja al lector comprobar tal afirmación.

La desigualdad que aparece en 6.4 (debida a H. Minkowski (1864-1909)) no admite extensión para valores de p en $(0, 1)$, sin embargo se tiene que:

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{L}_p(\mu).$$

Esta afirmación es inmediata de la desigualdad:

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad a, b \geq 0 \quad \text{y} \quad 0 < p < 1.$$

Asi: $d_p(f, g) = \int |f - g|^p \, d\mu$ define una semi-métrica en $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(p \in (0, 1))$.

Teorema 6.5. Sean $p \in [1, +\infty)$ fija y $\| \ \|_p$: $\mathcal{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}$ definida por $\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{1/p}$, entonces $\| \ \|_p$ es una seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Demostración. Es claro que:

i) $f = 0 \Rightarrow \|f\|_p = 0$ y $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. (c.d.)

ii) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. (Desigualdad de Minkowski).

□

Definición 6.6. Sea $p \in [1, +\infty)$ fija. Definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{L}_p(\mu)$ como sigue:

$$f \sim g \quad (f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)) \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0$$

o equivalentemente $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ (c.d.). Por 6.5, $\sim$ define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}_p(\mu)$. Si $[f]$ denota la clase de equivalencia de f relativa a μ (i.e. $[f] = \{g \in \mathcal{L}_p : f \sim g\}$) definimos

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p$$

Por 6.5 iii) este valor es independiente del representante de la clase y esta función constituye una **norma** en el espacio vectorial constituido por las clases y con las operaciones naturales:

$$[f] + [g] = [f+g] \text{ y } \alpha[f] = [\alpha f],$$

las cuales estan bien definidas, nuevamente por 6.5.

Observaciones 6.7. En lo que resta, **no haremos distinción** entre representantes de una misma clase. $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(p \in (0, +\infty))$ es entonces, un subespacio vectorial de $\mathbb{M}(X, S)$ en el que funciones iguales (c.d.) se consideran idénticas.

A continuación probamos que $(\mathcal{L}_p(\mu), \| \ \|_p)$ con $p \in [1, +\infty)$ es un espacio vectorial normado y completo *i.e.* es un espacio de Banach.

Teorema 6.8. (El teorema de F. Riesz y E. Fischer) Sea $p \in [1, +\infty)$ y (f_n) una sucesión de elementos en $\mathcal{L}_p(\mu)$ dadas, entonces existe $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ tal que:

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow (f_n) \text{ es de Cauchy con respecto a } \| \ \|_p.$$

Demostración.
Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mu)$. Es suficiente probar que (f_n) admite una subsucesión (f_{n_k}) para la que existe $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ tales que $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Usando la condición de Cauchy, es posible hallar una sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \dots$ tal que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Sea $g \in \mathbb{M}^+(X, S)$ dada por:

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|;$$

se mostrará que $\mu(\{x \in X : g(x) = +\infty\}) = 0$.

Por el lema de Fatou, por la desigualdad de Minkowski y por la continuidad y monotonía de $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$ tenemos que:

$$\left(\int g^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\lim_{m \to \infty} \int (|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{m \to \infty} \left(\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p\right) < \|f_{n_1}\|_p + 1$$

Asi pues por el ejercicio (43 i)) $\mu(\{x \in X : g(x) = +\infty\}) = 0$ y la serie que define a g converge (c.d.). Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ poniendo:

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{si } g(x) < +\infty, \\ 0 & \text{si } g(x) = +\infty. \end{cases}$$

Es claro que para todo $k \in \mathbb{N} : |f_{n_k}| \leq g$ (c. d.) y además $f_{n_k} \to f$ (c.d.) $(k \to \infty)$, en particular $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ (c.d.) cuando $k \to \infty$, pero la sucesión esta dominada (c.d.) por la función integrable g^p asi que por 5.6 obtenemos:

$$\int |f|^p \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int |f_{n_k}|^p \, d\mu \leq \int g^p \, d\mu < +\infty$$

por lo tanto $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

Por otro lado como $|f|^p \leq g^p$ (c.d.), entonces: $|f_{n_k} - f|^p \leq 2^p g^p$ (c.d.) y usando 5.6 nuevamente tenemos que:

$$0 = \lim_{k \to \infty} \|f_{n_k} - f\|_p.$$

□

Observación 6.9. Notamos que en el curso de la prueba anterior, se construyó a partir de (f_n), una subsucesión (f_{n_k}) que converge (c.d.) y en norma $\| \ \|_p$ a una $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

De manera similar se prueba que el espacio métrico $(\mathcal{L}_p(\mu), d_p)$ es completo también $0 < p < 1$.

3. Un caso especial

Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu =$ la medida de conteo, en virtud de 4.11 se tiene:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < +\infty\}$$

el cual es costumbre denotarlo por ℓ_p e identificar a sus elementos con las sucesiónes reales (x_n) tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Demostración. ℓ_p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ define una norma completa. La desigualdad de Hölder (6.3) adquiere la siguiente forma:

Sean p y $q \in (1, +\infty)$ exponentes conjugados. Si $x \in \ell_p$ y $y \in \ell_q$ entonces:

i) $xy : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $(xy)_n = x_n y_n \quad (n \in \mathbb{N})$ pertenece a l_1.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}$.

iii) La igualdad en ii) ocurre si y sólo si A, B constantes tales que:

$$A|x_n|^p = B|y_n|^q \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto último ya que el único subconjunto de $\mathbb{N}$ de medida cero es el vacío.

Si $p = 2 = q$, obtenemos la bien conocida desigualdad de Cauchy, así como la condición de colinealidad para la igualdad.

Se puede probar que

$$\ell_p \subset \ell_r \quad \text{para todo } 0 < p < r \text{ y que } \|x\|_r \leq \|x\|_p \quad \text{para todo } x \in \ell_p,$$

además:

$$\ell_p \subsetneq \bigcap_{0<p<r} \ell_r \text{ (ver el ejercicio (75))}.$$

$\square$

Volviendo a espacios de medida generales (X, S, μ) pueden ocurrir hechos muy curiosos, por ejemplo, se pueden construir funciones "razonables" que no pertenezcan a algún $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(p \in (0, +\infty))$ o funciones que pertenezcan a $\mathcal{L}_p(\mu)$ $\quad (0 < p < +\infty)$ precisamente para un único valor de p. (Ver el ejercicio (65)). Si $\mu(X) < +\infty$, entonces $\mathcal{L}_p(\mu) \subset \bigcap_{0<r<p} \mathcal{L}_r(\mu)$ en donde la contención puede ser propia (ver los ejercicios (62) y (63)).

Si $\mu(X) = 1$ entonces: $\|f\|_r \leq \|f\|_p$ para toda $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, con $0 < r < p$, además es posible probar que si $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces: $\exp \int (\log |f|)\, d\mu = \lim_{p \downarrow 0} \|f\|_p$ (ver el ejercicio (69)); por último, si f es acotada (c.d.), entonces $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ para todo $p \in (0, \infty)$ y $\lim_{p \uparrow \infty} \|f\|_p$ es finito y opera como una norma sobre el espacio vectorial de funciones en $\mathbb{M}(X, S)$ que son acotadas (c.d.), el cual se denotará justificadamente por $\mathcal{L}_\infty(\mu)$, mismo que a continuación examinamos.

4. El espacio $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

Definición 6.10. Sea (X, S, μ) un espacio de medida fijo. Definimos

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathbb{M}(X, S) : f \text{ es acotada (c.d.)}\}$$

y para $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ ponemos:

$$\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

Note que por definición el conjunto sobre el cual se toma el ínfimo, no es vacío.

Propiedades 6.11. Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ fija, entonces:

i) $\|f\|_\infty \geq 0$.

ii) $I_f = \{a > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}$ es igual al intervalo $[\|f\|_\infty, +\infty)$, si $\|f\|_\infty > 0$.

iii) $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ (c.d.)

iv) $\|f\|_\infty \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, si f es acotada.

v) $\|f\|_\infty = \sup\{c \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) > 0\}$. (Definición alternativa).

Demostración.

i) Es evidente.

ii) Es claro que $I_f \subset [\|f\|_\infty, +\infty)$.

Inversamente, sea $a \geq \|f\|_\infty$ arbitraria, como

$$\{x \in X : |f(x)| > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x)| > a + \frac{1}{n}\right\},$$

y $\quad a + \frac{1}{n} > \|f\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > a + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \Rightarrow a \in I_f.$$

iii) Se sigue inmediatamente del inciso anterior.

iv) Claramente

$$\{x \in X : |f(x)| > \sup\{|f(x)| : x \in X\}\} = \emptyset \Rightarrow \sup\{|f(x)| : x \in X\} \in I_f.$$

v) Sea $b = \sup\{c \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) > 0\}$. Si $b = 0$, entonces

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0 \quad \text{para todo } c > 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

Inversamente, si $\|f\|_\infty = 0$, entonces $f = 0$ (c.d.) (por iii)) y $b = 0$. Así es que supondremos que $\|f\|_\infty$ es positivo.

Ahora bien, para todo $c \in [0, \|f\|_\infty)$ se tiene que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) > 0 \text{ por lo que } c \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|f\|_\infty \leq b.$$

Si $\|f\|_\infty < b$, entonces:

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq c\} = 0 \quad \text{para todo } c \in (\|f\|_\infty, b),$$

lo cual no es posible por definición de b por lo tanto $\|f\|_\infty = b$.

□

Note que si $J_f = \{c \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) > 0\}$, entonces $J_f = \{0\}$ si y sólo si $f = 0$ (c.d.) y $J_f = [0, \|f\|_\infty)$, si $\|f\|_\infty > 0$.

Observaciones 6.12. De la propiedad iii) se sigue que si f y g pertenecen a $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ y $f = g$ (c.d.) entonces $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ (c.d.) y $|f(x)| \leq \|g\|_\infty$ (c.d.) por lo tanto $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

Lo anterior demuestra que $\|\ \|_\infty$ esta bien definida si no distinguimos entre funciones acotadas (c.d.) en $\mathbb{M}(X, S)$ que son iguales (c.d.), cosa que haremos de aquí en adelante.

Teorema 6.13. $(\mathcal{L}_\infty(\mu), \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Es claro que $0 \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$. Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces por 6.11 iii):

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

(c. d.) de donde

$$f + g \in \mathcal{L}_\infty(\mu) \text{ y } \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

También $|\alpha f| \leq |\alpha|\|f\|_\infty$ (c.d.) asi que $\alpha f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$. Si $\alpha = 0, \alpha f = 0$ y trivialmente $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$; si $\alpha \neq 0$, entonces:

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf\{a > 0 : \mu(\{x \in X : |\alpha f(x)| > a\}) = 0\}$$

$$= |\alpha| \inf\left\{\frac{a}{|\alpha|} > 0 : \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{a}{|\alpha|}\right\}\right) = 0\right\} = |\alpha|\|f\|_\infty.$$

Lo anterior prueba los requisitos que faltaban para establecer que $(\mathcal{L}_\infty(\mu), \|\ \|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$. Como $\mathcal{N}(\mu)$ es un σ-anillo y

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \text{(c.d.) para todo } n, m$$

y

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \quad \text{(c.d.) para todo } n \in \mathbb{N}$$

existe un conjunto común $E \subset S$ de medida cero tal que $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ y $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ para todo n, m y para todo $x \notin E$, de donde se sigue que $(f_n(x))$ es uniformemente de Cauchy en $X - E$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{si } x \notin E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Sea $\varepsilon > 0$, hallamos $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ si $m > n \geq N$, entonces:

$$|f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)| \leq \varliminf_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$\leq \varepsilon + \|f_n\|_\infty \quad \text{para todo } x \notin E$$

y $n \geq N$ por lo tanto $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ y además si $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \notin E \end{aligned}$$

i.e. $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ si $n \geq N$.

□

Se ha probado que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $f_n \to f$ uniformemente (c.d.). El recíproco es cierto también y es fácil probarlo.

Observación 6.14. Si (X, S, μ) es como en 6.10, entonces $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ coincide con el espacio de sucesiones acotadas $\ell_\infty = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\}$.

Teorema 6.15. Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ dadas, entonces:

i) $fg \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

ii) $\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

iii) La igualdad en ii) ocurre si y sólo si

$$|g(x)| = \|g\|_\infty \text{ (c.d.) en el conjunto } \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Demostración.
i) y ii). Por 6.11 iii):

$$\int |fg|\, d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty\, d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty \Rightarrow fg \in \mathcal{L}_1(\mu).$$

iii)

$$\begin{aligned} \int |fg|\, d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty &\Leftrightarrow \int |f|(\|g\|_\infty - |g|)\, d\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow |f|(\|g\|_\infty - |g|) = 0 \text{ (c.d.)} \\ &\Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0 \;\text{ y }\; |g(x)| < \|g\|_\infty\}) = 0. \end{aligned}$$

□

Se consideran a $p = 1$ y $q = +\infty$ como exponentes conjugados.

Definición 6.16. Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $p \in (0, +\infty)$ dados. Definimos

$$\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(\mu) = \{f \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X, S) : |f|^p \in \mathcal{L}_1(\mu)\}$$

y

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(\mu) = \{f \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X, S) : |f| \text{ es acotada (c.d.)}\}$$

Todo lo afirmado sin excepción, desde 6.2 hasta 6.16 para $\mathcal{L}_r(\mu)$ y ℓ_r permanece cierto para $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}(\mu)$ y $\ell_r^{\mathbb{C}}$ $(r \in (0, +\infty])$ (salvo modificaciones menores como el considerar escalares $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathbb{M}^{\mathbb{C}}(X, S)$). Asi pues $(\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}(\mu), \|\ \|_r)$ $(1 \leq r \leq +\infty)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, normado y completo, y para $r \in (0, 1)$ $(\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}(\mu), d_r)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y d_r es una métrica completa.

CAPÍTULO 7

Medidas exteriores

1. Introducción

En este capítulo se introducen las nociones de casi medida y la de medida exterior. Se proporciona un método de construcción de medidas a partir del concepto más primitivo de casi medida y se examina la unicidad de la construcción obtenida. Como caso particular se obtiene la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Definición 7.1. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra. Una **casi-medida** es una función conjuntista $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) $\mu(A) \geq 0$, para toda $A \in \mathcal{A}$.

iii) Si (A_n) es una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Observaciones 7.2. Como $\mu(\emptyset) = 0$, entonces μ es aditiva y también es monótona. Si (A_n) es una sucesión de elementos no-necesariamente disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si $\mu(X) < +\infty$ entonces μ se llama **finita**. Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $\mu(A_i) < +\infty$ $(A_i \in \mathcal{A})$ entonces μ se llama σ-**finita**.

Definición 7.3. Una **medida exterior** es una función conjuntista $\rho : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

i) $\rho(\emptyset) = 0$.

ii) $\rho(E) \geq 0$ para todo $E \in X$.

iii) $\rho(E) \leq \rho(F)$ si $E \subset F \subset X$. (Monotonía).

iv) $\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$ para toda sucesión (E_n) de subconjuntos de X. (σ-subaditividad). Como $\rho(\emptyset) = 0$, entonces ρ es también subaditiva.

Si $\rho(X) < +\infty$ entonces ρ se llama **finita**. Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $\rho(E_i) < +\infty$ para todo i, entonces la medida exterior se llama **σ-finita**.

Ejemplo 7.4. Sea (X, d) un espacio métrico separable (si se desea puede tomarse $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual). Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X: definimos $\rho : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ como sigue:

$$\rho(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E)}{2^n}$$

en donde:

$$\rho_n(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \cap U_n \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } E \cap U_n = \emptyset. \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

entonces ρ es una medida exterior y tiene la siguiente propiedad:

$$\rho(E) = \rho(\overline{E}) \quad \text{para todo } E \subset X (\overline{E} = \text{ cerradura de } E).$$

Para más ejemplos ver el ejercicio (80).

Toda casi-medida genera una medida exterior de una manera natural y que consiste en "aproximar desde afuera" a subconjuntos de X mediante cubiertas numerables de elementos en $\mathcal{A}$.

Definición 7.5. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \;\; (n \in \mathbb{N})\right\} \text{ para todo } E \subset X$$

Una sucesión (A_n) de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $E \subset \bigcup_n A_n$ se llama una **$\mathcal{A}$-cubierta de E** y μ^* se llama la **medida exterior generada por** μ, término que queda justificado por el siguiente teorema:

Teorema 7.6.

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$$

es una medida exterior y es tal que:

$$\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición que $\mu^*(E) \geq 0$ para todo $E \subset X$. Claramente $\emptyset, \emptyset, \ldots$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de $\emptyset$, entonces $\mu^*(\emptyset) \leq 0$ por lo tanto, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Sean $E \subset F \subset X$ dados. Como toda $\mathcal{A}$-cubierta de F es también una $\mathcal{A}$-cubierta de E, se sigue de la definición que:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F).$$

Establecemos ahora la σ-sub-aditividad. Sea (E_n) una sucesión de subconjuntos de X.

Si $\mu^*(E_n) = +\infty$ para algún n, entonces trivialmente

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad (= +\infty).$$

por lo que supondremos: $\mu^*(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria, para cada n hallamos una $\mathcal{A}$-cubierta numerable $\left(A_i^{(n)}\right)$ de E_n tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i^{(n)}\right) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Como $\left\{A_i^{(n)} : (i,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ se tiene que:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{(i,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu\left(A_i^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n) + \varepsilon$$

por lo tanto, μ^* es σ-subaditiva y constituye una medida exterior.

Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces es evidente que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$; inversamente será suficiente probar que $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ para toda $\mathcal{A}$-cubierta (A_i) de A. Es claro que basta considerar sólo aquellas $\mathcal{A}$-cubiertas en las que $A_i \subset A$ (de otro modo se reemplaza cada A_i con $A \cap A_i \in \mathcal{A}$, lo cual sólo hace decrecer el valor de la serie).

Así, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y usando 7.2 concluimos que:

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

□

Por otro lado, μ es σ-finita si y sólo si μ^* es σ-finita.

Observación 7.7. Es un fácil ejercicio comprobar que una función conjuntista que sea: no-negativa, σ-subaditiva, aditiva, que valga 0 en $\emptyset$ y esté definida en una σ-álgebra es una medida, en particular una medida exterior ρ es una medida si y sólo si ρ es aditiva.

2. El teorema de extensión de Carathéodory-Hopf

En general, una medida exterior no es una medida y esto ocurre en virtud de que $\mathcal{P}(X)$ es un dominio "demasiado grande". Lo que haremos a continuación es elegir algunos subconjuntos de X en donde la medida exterior sea aditiva.

La siguiente definición se debe a K. Carathéodory (1873-1950).

Definición 7.8. (Carathéodory (1918)). Sea $\rho : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Diremos que $E \subset X$ es **ρ-medible** (o **Lebesgue-medible**) si:

$$\rho(B) = \rho(B\cap E) + \rho(B - E) \quad \text{para todo } B \subset X$$

i.e. si E y $X - E$ dividen aditivamente a todo subconjunto de X.

Denotamos $\mathcal{A}^\rho = \{E \subset X : E \text{ es } \rho\text{-medible}\}$ y en el caso de una medida exterior μ^* generada por una casi-medida μ, denotaremos $\mathcal{A}^* = \{E \subset X : E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$.

Observación 7.9. Como toda medida exterior es subaditiva, basta pedir:

$$\rho(B) \geq \rho(B\cap E) + \rho(B - E) \quad \text{para todo } B \subset X$$

en la definición anterior.

El siguiente resultado identifica inmediatamente algunos elementos de $\mathcal{A}^\rho$.

Proposición 7.10. Sea $\rho : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior, entonces:

i) $E \in \mathcal{A}^\rho \Leftrightarrow X - E \in \mathcal{A}^\rho$.

ii) $E \in \mathcal{A}^\rho$, si $\rho(E) = 0$.

Demostración.

i) Es evidente y se omite.

ii) Por la no-negatividad y la monotonía de ρ se tiene que:

$$\rho(B\cap E) = 0 \text{ y } \rho(B - E) \leq \rho(B)$$
$$\text{para todo } B \subset X \Rightarrow E \in \mathcal{A}^\rho, \text{ por 7.9.}$$

□

Teorema 7.11. (De extensión de K. Carathéodory - E. Hopf (1918)). Sea $\rho : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior, entonces:

a) $\mathcal{A}^\rho$ es una σ-álgebra.

b) $\overline{\rho} = \rho\big|_{\mathcal{A}^\rho} : \mathcal{A}^\rho \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida completa.

En caso de que $\rho = \mu^*$ sea la medida exterior generada por una casi medida $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces:

c) $S(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$

Demostración.

a) Por 7.10 i) y ii) se tiene que $\mathcal{A}^\rho$ es cerrada bajo complementación y contiene a $\emptyset$, por lo que será suficiente probar que $\mathcal{A}^\rho$ es cerrada bajo uniones numerables.

Empecemos con la unión de dos elementos de $\mathcal{A}^\rho$.

Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{A}^\rho$; como $E_2 \in \mathcal{A}^\rho$, entonces para todo $B \subset X$ cumplen:

$$\rho(B \cap E_1) = \rho(B \cap E_1 \cap E_2) + \rho((B \cap E_1) - E_2) \qquad (7.1)$$

$$\rho(B - E_1) = \rho((B \cap E_2) - E_1) + \rho(B - (E_1 \cup E_2)) \qquad (7.2)$$

Sumando (7.1) y (7.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho(B) &= \rho(B \cap E_1 \cap E_2) + \rho((B \cap E_1) - E_2) \\ &\quad + \rho((B \cap E_2) - E_1) + \rho(B - (E_1 \cup E_2)) \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Sustituyendo B por $B \cap (E_1 \cup E_2)$ en (7.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho(B \cap (E_1 \cup E_2)) &= \rho(B \cap E_1 \cap E_2) + \rho((B \cap E_1) - E_2) \\ &\quad + \rho((B \cap E_2) - E_1) \end{aligned} \qquad (7.4)$$

Comparando (7.3) y (7.4) obtenemos:

$$\rho(B) = \rho(B \cap (E_1 \cup E_2)) + \rho(B - (E_1 \cup E_2)) \quad \text{para todo } B \subset X;$$

por lo tanto $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}^\rho$

Usando el ejercicio (2) es suficiente probar que si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos en $\mathcal{A}^\rho$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}^\rho$.

Notamos que si E_1 y E_2 son disjuntos, entonces la relación (7.4) se reduce a:

$$\rho(B \cap (E_1 \cup E_2)) = \rho(B \cap E_1) + \rho(B \cap E_2) \quad \text{para todo } B \subset X \quad (7.5)$$

Procediendo por inducción obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\rho\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho(B \cap E_i) \quad \text{para todo } B \subset X \qquad (7.6)$$

si $E_1, \ldots, E_n$ son subconjuntos ajenos en $\mathcal{A}^\rho$.

Sea (E_i) una sucesión de conjuntos disjuntos, denotamos

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad (n \geq 1) \text{ y } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

entonces $X - E \subset X - F_n$ y como $F_n \in \mathcal{A}^\rho$ se sigue de (7.6) que:

$$\rho(B) \geq \sum_{i=1}^{n} \rho(B \cap E_i) + \rho(B - E) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{para todo } B \subset X,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \rho(B) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(B \cap E_i) + \rho(B - E) \\ &\geq \rho(B \cap E) + \rho(B - E) \quad \text{para todo } B \subset X \end{aligned} \qquad (7.7)$$

asi que $E \in \mathcal{A}^\rho$, por lo tanto, $\mathcal{A}^\rho$ es una σ-álgebra.

b) Es claro que $\overline{\rho} : \mathcal{A}^\rho \to \overline{\mathbb{R}}$ es no negativa y $\overline{\rho}(\emptyset) = 0$.

Sea (E_i) una sucesión disjunta y arbitraria de elementos en $\mathcal{A}^\rho$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Si ponemos $B = E$ en (7.7) obtenemos que

$$\overline{\rho}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\rho}(E_i)$$

lo cual es suficiente, por la σ-subaditividad de $\overline{\rho}$, para obtener la σ-aditividad de $\overline{\rho}$. Por lo tanto $\overline{\rho}$ es una medida.

Sean $E \in \mathcal{A}^\rho$ con $\overline{\rho}(E) = 0$ y $F \subset E$ dados, entonces $\rho(F) = 0$ y por 7.10 ii) $F \in \mathcal{A}^\rho$ también, lo que prueba que $\overline{\rho}$ es completa.

c) Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida y $\rho = \mu^*$ la medida exterior generada. Como $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra será suficiente probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset X$ arbitrarios, si $\mu^*(B) = +\infty$, entonces $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A)$ trivialmente, por lo que supondremos que

$\mu^*(B) < +\infty$. Para $\varepsilon > 0$ dada, hallamos una $\mathcal{A}$-cubierta numerable (A_n) de B tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

Como $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$ (7.6), por la monotonía y la σ-sub-aditividad de μ^* y la aditividad de μ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) &\leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i - A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

Pero $\varepsilon > 0$ es arbitraria, así que $A \in \mathcal{A}^*$

□

Denotaremos $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$. Puede probarse que si μ es σ-finita, entonces: $(\mathcal{A}^*, \overline{\mu})$ es la compleción de $(S(\mathcal{A}), \mu|_{S(\mathcal{A})})$ (ejercicio (90)).

Teorema 7.12. (H. Hahn (1921)) Sean $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida σ-finita, $S \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}^*$ y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida tal que: $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mu}(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}^*$.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{A}^*$ arbitrario y (X_n) una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{A}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{y} \quad \mu(X_n) < +\infty \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\overline{\mu}(E) = \lim_{n \uparrow \infty} \overline{\mu}(E \cap X_n) \quad \text{y} \quad \nu(E) = \lim_{n \uparrow \infty} \nu(E \cap X_n),$$

así que es suficiente probar que $\nu(E_n) = \overline{\mu}(E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $E_n = E \cap X_n$.

Sea (A_j) una $\mathcal{A}$-cubierta arbitraria de E_n, entonces:

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

por lo que $\nu(E) \leq \overline{\mu}(E)$; de la misma manera obtenemos que:

$$\nu(X_n - E_n) \leq \overline{\mu}(X_n - E_n)$$

y como

$$\nu(E_n) + \nu(X_n - E_n) = \overline{\mu}(E_n) + \overline{\mu}(X_n - E_n)$$

se sigue de la finitud de cada sumando que $\nu(E_n) = \overline{\mu}(E_n)$.

□

Un argumento similar prueba que $\mu(E) = \nu(E)$ para todo E que pertenece a $S(\mathcal{A})$, si $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y ν está definida sólo en $S(\mathcal{A})$.

Ejemplo 7.13. El teorema anterior puede fallar si μ no es σ-finita.

Sea $X = \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ y denotemos $(a, b]' = (a, b] \cap X$, con $a, b \in X$ y $\mathbb{E} = \{(a, b]' : a, b \in X\}$. Es claro que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{E})$ es la colección de uniones finitas disjuntas de "intervalos" en $\mathbb{E}$.

Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ poniendo $\mu(A) = +\infty$ si A es infinito y 0 si $A = \emptyset$. Por otro lado es inmediato comprobar que $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(X)$ y que $\overline{\mu} : \mathcal{A}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ está dada por $\overline{\mu}(E) = +\infty$ si $E \neq \emptyset$ y 0 si $E = \emptyset$.

Si $\nu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ denota la medida de conteo entonces $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$ pero obviamente $\nu \neq \overline{\mu}$ en $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(X)$.

Existe una manera mas intuitiva y natural (pero más larga) para definir a los elementos de $\mathcal{A}^*$ y que consiste en aproximar a los subconjuntos de X "desde adentro" también, dando lugar a la llamada **medida interior** la cual tiene propiedades duales a las de μ^*. (Ver los ejercicios (87) y (88). En especial (88 ii)).

3. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Emplearemos el método descrito en 7.11 c) y 7.12 para construir la medida de Lebesgue para subconjuntos de $\mathbb{R}$ por lo que necesitaremos un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos $\mathbb{R}$ tal que: $S(\mathcal{A}) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ y una casi medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Sea $\mathcal{A} = \{$unión finita y disjunta de intervalos de la forma $(a, b], (-\infty, b]$ y $(a, +\infty)\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (ver el ejercicio (7)), entonces $S(\mathcal{A}) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ y definimos $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

Si $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ con algún intervalo I_j que no sea acotado, entonces ponemos $\lambda(A) = +\infty$ y en otro caso ponemos $\lambda(A) = \sum_{j=1}^{n}$ longitud (I_j).

Notamos que el valor de $\lambda(A)$ no depende de las posibles descripciones de A.

Lo verificamos sólo si $\lambda(A) < \infty$. Supongamos que $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ y $A = \bigcup_{k=1}^{m} J_k$ con I_j y J_k en $\mathcal{A}$ acotados, entonces

$$I_j = \bigcup_{k=1}^{m} I_j \cap J_k \quad \text{y} \quad J_k = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \cap J_k \quad \text{así pues}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda(J_k)$$

Teorema 7.14. $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como en el párrafo anterior es una casi-medida σ-finita.

Demostración. Claramente $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda(A) \geq 0$, así que por 7.1 sólo falta probar que si (A_n) es una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Caso 1) $A = (a, b]$ para algunos $a < b \in \mathbb{R}$.

Como cada A_n es la unión finita y disjunta de intervalos acotados se puede suponer que:

$$(a, b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \text{ (disjunta)}$$

y hay que probar que:

$$b - a = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j).$$

Sea $(a_{j_1}, b_{j_1}], \ldots, (a_{j_n}, b_{j_n}]$ una subcolección finita arbitraria; reenumerando si es necesario, podemos suponer que:

$$a \leq a_{j_1} < b_{j_1} \leq a_{j_2} < \ldots < b_{j_{n-1}} \leq a_{j_n} < b_{j_n} \leq b,$$

entonces:

$$b - a \geq \sum_{i=1}^{n} (b_{j_i} - a_{j_i}) \text{ por lo tanto } b - a \geq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j).$$

Inversamente, sea $\varepsilon \in (0, b - a)$ dada y sea $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(j \in \mathbb{N})$, reenumerando si es necesario, supondremos que $a_1 < a + \varepsilon$.

Sean $I_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j)$ si $j \geq 1$, entonces $\mathcal{G} = \{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta del compacto $[a + \varepsilon, b]$, por lo que existen $I_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_m} \in \mathcal{G}$ tales que:

$$[a + \varepsilon, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{j_i}.$$

Eliminando intervalos innecesarios y reenumerando se puede suponer que forman una "cadena simple" i.e.:

$$a_{j_1} < a + \varepsilon < a_{j_2} < b_{j_1} + \varepsilon_{j_1} < a_{j_3} < b_{j_2} + \varepsilon_{j_2}$$
$$< \ldots < a_{j_m} < b_{j_{m-1}} + \varepsilon_{j_{m-1}} \leq b < b_{j_m} + \varepsilon_{j_m}$$

Así que:

$$b - a - \varepsilon < (b_{j_m} + \varepsilon_{j_m}) - a_{j_1} = (b_{j_1} + \varepsilon_{j_1} - a_{j_1}) + \sum_{l=2}^{m} (b_{j_l} + \varepsilon_{j_l} - b_{j_{l-1}} - \varepsilon_{j_{l-1}})$$

$$< \sum_{k=1}^{m} (b_{j_l} + \varepsilon_{j_l} - a_{j_l}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria obtenemos:

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j).$$

Caso 2) $A = (a, +\infty)$.

Si algún A_n contiene un intervalo no acotado, entonces

$$\lambda(A) = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Asi que supondremos como en el caso 1), que cada A_n es un intervalo acotado $(a_n, b_n]$. Sea $b > a$ dada y denotamos $b'_n = \min\{b, b_n\}$ entonces:

$$(a, b] = (a, b] \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n]$$

Los intervalos $(a_n, b_n]$ son disjuntos dos a dos por el caso 1)

$$b - a = \sum_{\{n:a_n<b\}} b'_n - a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n.$$

haciendo tender b a infinito obtenemos que:

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n.$$

Nótese que el caso $A = (-\infty, b]$ es totálmente análogo.

Caso 3) $A \in \mathcal{A}$ general.

Entonces A consiste de la unión finita y disjunta de conjuntos examinados en casos anteriores y el resultado es consecuencia de lo ya probado y se deja al lector terminar la prueba.

Finalmente, como $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n-1, n]$ se sigue que λ es σ-finita.

□

Corolario 7.15. Existe una única medida σ-finita $\lambda : \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ que asigna a cada intervalo su longitud.

Demostración. Probaremos que la extensión dada en 7.11 (c) de la casi-medida λ definida en 7.14 sobre $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = S(\mathcal{A})$ y que denotaremos igual, satisface lo arriba enunciado. La unicidad es consecuencia del comentario posterior al teorema de H. Hahn 7.12.

Dado que $\{b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, b]$ y que λ es una medida obtenemos que

$$\lambda(\{b\}) = \lim_{n\downarrow\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

de donde $\lambda((a, b)) = \lambda((a, b]) - \lambda(\{b\}) = b - a$ y análogamente con los otros intervalos.

□

Definición 7.16. Denotamos por $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de las λ^*-medibles (a los cuales llamaremos **Lebesgue-medibles**) y por $\overline{\lambda} : \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue. Si $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$-medible entonces diremos que f es **Lebesgue-medible**.

Observaciones 7.17. Como λ es σ-finita, se sigue del ejercicio (90) que $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ es la λ-compleción de $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

CAPÍTULO 8

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

1. Introducción

En este capítulo se examina el problema "fácil" y el problema "difícil" de la medida en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$. Usando el axioma de elección se construyen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue medibles y se calcula la cardinalidad de la clase de dichos conjuntos.

Por otro lado se establecen condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de $\mathbb{R}$ sea Lebesgue-medible y se prueba la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue. Finalmente usando los métodos del capítulo anterior se construye la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no-decreciente y continua por la derecha.

2. El problema "difícil" de la medida en $\mathbb{R}$

El problema consiste en hallar una función conjuntista no-negativa ρ tal que:

i) $\rho(E)$ esta definida para todo $E \subset \mathbb{R}$.

ii) $\rho(I) =$ longitud (I) para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

iii) ρ es σ-aditiva.

iv) ρ es invariante bajo isometrías de $\mathbb{R}$ i.e. Si $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una isometría, entonces:
$$\rho(j(E)) = \rho(E) \quad \text{para todo } E \in \mathbb{R}.$$

(Es sencillo comprobar que $j(x) = \pm x + d$ con $d \in \mathbb{R}$ son las únicas isometrías de $\mathbb{R}$).

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.1. (G. Vitali (1905)) Si se supone el axioma de elección, entonces el problema "difícil" en $\mathbb{R}$ no es soluble.

Demostración. Se probará que cualquier función conjuntista no-negativa que satisfaga las condiciones (ii), (iii) y (iv) del problema "difícil", no puede definirse para todo $E \subset \mathbb{R}$.

Definimos una relación $\sim$ en $[0,1]$ como sigue:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ es un racional.}$$

Es inmediato verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia e induce una partición de $[0,1]$ en clases de equivalencia. Observamos que cada clase contiene una cantidad numerable de elementos de $[0,1]$, por lo que hay una cantidad no-numerable de clases. Por el **axioma de elección** es posible construir un conjunto $V \subset [0,1]$ que contiene **exactamente un** representante de cada clase.

Probaremos que no es posible definir $\rho(V)$, para lo cual es necesario establecer las siguientes dos propiedades de V:

a) Si r y s son racionales distintos, entonces los trasladados $V+r$ y $V+s$ son disjuntos.

b) $[0,1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}'} V + r \subset [-1,2]$ donde $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

Empecemos con a) si $z \in (V+r) \cap (V+s)$, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 + r = z = v_2 + s$, entonces $v_1 \sim v_2$ y por construcción de V se tiene que $v_1 = v_2$ en consecuencia $r = s$, lo cual no es posible.

Para b), es claro que para todo $r \in \mathbb{Q}'$ se tiene que $V + r \subset [-1,2]$; por otro lado si $x \in [0,1]$ hallamos $v \in V$ tal que $x \sim v$, entonces $r = x - v \in \mathbb{Q}'$ y $x = v + r \in V + r$.

Si ρ satisface (ii), (iii) y (iv), se sigue de a) y b) que:

$$1 = \rho([0,1]) \leq \rho\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}'} V + r\right) = \sum_{r\in\mathbb{Q}'} \rho(V+r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}'} \rho(V) \leq \rho([-1,2]) = 3$$

Así pues, como $\sum_{r\in\mathbb{Q}'} \rho(V) > 0$ se debe tener que $\rho(V) > 0$ y como $\sum_{r\in\mathbb{Q}'} \rho(V) < +\infty$, entonces $\rho(V) = 0$ por lo tanto $\rho(V)$ no puede ser definido.

□

Observaciones 8.2. Como $\overline{\lambda}$ es invariante bajo isometrías (ver el ejercicio (94)) entonces la construcción anterior muestra en particular que $V \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, así que $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. En 1966 R. Solovay probó que dentro del marco de los axiomas de Zermelo-Fraenkel no es posible construir un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no sea Lebesgue-medible sin hacer uso del axioma de elección.

(Para otra propiedad más de los conjuntos de Vitali (ver el ejercicio (102)) y para otro no medible ver el ejercicio (103) y también el [O]).

El problema **"fácil"** de teoría de la medida en $\mathbb{R}$ consiste en hallar una función conjuntista no-negativa que satisfaga (i), (ii) y (iv) de 8.1 y que sólo sea aditiva, en esta dirección tenemos resultados positivos y negativos, a saber.

Teorema 8.3. El problema "fácil" de teoría de la medida tiene solución (no única) en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$. (S. Banach)(1923)

(En $\mathbb{R}^2$, la condición (ii) debe cambiarse por: $\rho($ rectángulo $) =$ área (rectángulo))

El problema "fácil" de teoría de la medida no tiene solución en $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$ (F. Hausdorff). (Nuevamente debe reemplazarse (ii) por la condición: ρ(celda) $=$ volumen (celda)).

No abundaremos en estos resultados y remitimos al lector a [B-N] pp. 188-194 para el primero y a [N] pp. 238-245 Vol. II para el segundo.

El siguiente resultado prueba que si suponemos el axioma de elección entonces hay tantos no medibles como subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Teorema 8.4. $\#(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) = 2^c$ y si suponemos el axioma de elección entonces,

$$\#(\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) = 2^c.$$

Demostración. Como $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ entonces,

$$\#(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) \leq 2^c.$$

Por otro lado, si $C \subset [0,1]$ denota el conjunto ternario de Cantor clásico entonces se comprueba que $\lambda(C) = 0$ y como $\overline{\lambda} : \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es completa, entonces

$$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \text{ y } 2^c \leq \#(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}})$$

Denotemos por $\widetilde{C}$ el conjunto ternario clásico construido en $[1,2]$ y $V \subset [0,1)$ un conjunto de Vitali (como en 8.1), entonces

$$F \cup V \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \quad \text{para todo } F \subset \widetilde{C}$$

(ya que si $F \cup V$ es Lebesgue-medible entonces $V = (F \cup V) - F$ lo sería también); así pues

$$\{F \cup V : F \subset \widetilde{C}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}.$$

por lo tanto $2^c \leq \#(\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) \leq 2^c$.

□

Observación 8.5. En 1916, H. Rademacher probó que si $E \subset \mathbb{R}$ es tal que $\lambda^*(E) > 0$ entonces E contiene un subconjunto que no es Lebesgue-medible (ver los ejercicios (102 ii)) y (103 ii))).

A continuación examinamos algunas condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ sea Lebesgue-medible.

Teorema 8.6. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto $G = G_\varepsilon$ tal que

$$E \subset G \quad \text{y} \quad \lambda^*(G - E) < \varepsilon.$$

iii) Existe un conjunto K del tipo $\mathcal{G}_\delta$ con $E \subset K$ y tal que

$$\lambda^*(K - E) = 0.$$

iv) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F = F_\varepsilon$ tal que

$$F \subset E \quad \text{y} \quad \lambda^*(E - F) < \varepsilon.$$

v) Existe un conjunto H del tipo $\mathcal{F}_\sigma$ con $H \subset E$ y tal que

$$\lambda^*(E - H) = 0.$$

(La condición (iv) se debe a Ch. de la Vallée-Poussin)

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii)

Caso 1) $\overline{\lambda}(E) < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\overline{\lambda}(E) = \lambda^*(E)$, se sigue de 7.5 que existe una $\mathcal{A}$-cubierta (A_i) de E tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \leq \overline{\lambda}(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\lambda(A_i) < +\infty$, entonces A_i es la unión de un número finito de intervalos de la forma $(a,b]$ y es posible hallar un conjunto abierto $G_i = G(\varepsilon, i)$ tal que

$$A_i \subset G_i \quad \text{y} \quad \overline{\lambda}(G_i) \leq \lambda(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

(por ejemplo, consideremos un intervalo abierto un poco más grande para cada intervalo $(a,b]$ que constituya a A_i y sea G_i la unión de éstos).

Sea $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, entonces $E \subset G$, G es abierto y además:

$$\overline{\lambda}(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(G_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\lambda}(E) + \varepsilon$$

de donde por la sustractividad de $\overline{\lambda}$ se sigue que:

$$\lambda^*(G - E) = \overline{\lambda}(G - E) < \varepsilon.$$

Caso 2) $\overline{\lambda}(E) = +\infty$.

Escribimos $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ donde $E_j = (-j, j]$, entonces

$$E_j \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \overline{\lambda}(E_j) < +\infty \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dada, por el caso 1) hallamos G_j abierto tal que

$$E_j \subset G_j \text{ y } \overline{\lambda}(G_j - E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Sea $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$, entonces G es abierto, $E \subset G$ y por monotonía y σ-subaditividad de λ tenemos:

$$\overline{\lambda}(G - E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda}(G_j - E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda}(G_j - E_j) < \varepsilon$$

ii) $\Rightarrow$ iii)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hallamos G_n un conjunto abierto tal que $E \subset G_n$ y $\lambda^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$.

Sea $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, entonces K es de tipo G_δ y $\lambda^*(K - E) \leq \lambda^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$, por lo tanto $\lambda^*(K - E) = 0$.

iii) $\Rightarrow$ i)

Como $E \subset K$, se tiene que: $E = K - (K - E)$, pero $K \in \mathcal{G}_\delta \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y por 7.10 ii), $K - E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ por lo tanto $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$.

i) $\Rightarrow$ iv)

Sea $\varepsilon > 0$, dado que $\mathbb{R} - E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ se sigue de ii) que existe $G = G_\varepsilon$ abierto tal que $\mathbb{R} - E \subset G$ y $\lambda^*((\mathbb{R} - G) - E) < \varepsilon$, entonces $F = \mathbb{R} - G$ satisface los requisitos.

iv) $\Rightarrow$ v)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hallamos un conjunto cerrado F_n tal que $F_n \subset E$ y $\lambda^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$.

Sea $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces H es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$ y

$$\lambda^*(E - H) \leq \lambda^*(E - F_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto $\lambda^*(E - H) = 0$

v) $\Rightarrow$ i)

Como $H \subset E$, entonces $E = H \cup (E - H)$, pero $H \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y por 7.10 inciso ii), $E - H \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, por lo tanto $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$.

□

Otra caracterización de los elementos de $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ está dada por el siguiente teorema:

Teorema 8.7. (Básico de aproximación) Sean $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ con $\overline{\lambda}(E) < +\infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $A = A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{\lambda}(E \triangle A) < \varepsilon$.

Inversamente si $E \subset \mathbb{R}$ es tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A = A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ con $\overline{\lambda}(E \triangle A) < \varepsilon$, entonces $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (ver el ejercicio (81) en donde se enuncia este resultado en un contexto más general).

El teorema 8.6 nos dice que los conjuntos Lebesgue-medibles son precisamente aquellos que pueden aproximarse desde "afuera" mediante conjuntos abiertos y desde "adentro" mediante conjuntos cerrados. Lo que haremos a continuación es probar que bastan los conjuntos compactos para aproximar desde adentro. Necesitamos la siguiente definición:

Definición 8.8. Sean (X, τ) un espacio topológico, S una σ-álgebra que contenga a la σ-álgebra de Borel generada por τ y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida. Decimos que μ es **regular** en S si para todo $E \in S$ se tiene que:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G \text{ y } G \in \tau\} \tag{8.1}$$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ y } K \text{ es } \tau\text{-compacto}\} \tag{8.2}$$

Teorema 8.9. La medida de Lebesgue $\overline{\lambda} : \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es regular.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ dado.

Si $\overline{\lambda}(E) = +\infty$, entonces $\overline{\lambda}(G) = +\infty$ para todo abierto G que contenga a E y (8.1) es inmediato. Si $\overline{\lambda}(E) < +\infty$, entonces (8.1) se sigue de 8.7 (ii) y de la sustractividad de $\overline{\lambda}$.

Si existe $N > 0$ tal que $E \subset [-N, N]$ entonces todo subconjunto cerrado de E es compacto y (8.2) se sigue de 8.7 (iv) y de la sustractividad de $\overline{\lambda}$.

Si $E \not\subset [-N, N]$ para todo $N > 0$, entonces

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ con } E_n = E \cap [-n, n] \quad \text{y} \quad \overline{\lambda}(E) = \lim_{n \uparrow \infty} \overline{\lambda}(E_n).$$

Si $\overline{\lambda}(E) < +\infty$, dada $\varepsilon > 0$ arbitraria existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\lambda}(E) < \overline{\lambda}(E_N) + \frac{\varepsilon}{2}$ y como $E_N \subset [-N, N]$ hallamos $K_N \subset E_N \subset E$ compacto tal que:

$$\overline{\lambda}(E_N) < \overline{\lambda}(K_N) + \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces

$$\overline{\lambda}(E) < \overline{\lambda}(K_N) + \varepsilon$$

lo cual establece (8.2). Finalmente si $\overline{\lambda}(E) = +\infty$, dada $M > 0$, hallamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(E_N) > 2M$; a continuación hallamos $K_N \subset E_N \subset E$ compacto tal que:

$$\lambda(E_N) < \lambda(K_N) + M,$$

entonces $\lambda(K_N) > M$, estableciendo (8.2).

□

En general se puede probar que si (X, d) es un espacio métrico completo y separable (i.e. un espacio **polaco**) entonces toda medida finita definida sobre la σ-álgebra de Borel es regular (S. M. Ulam 1938).

3. La medida de Lebesgue-Stieltjes

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente y continua por la derecha. Como g es monótona se sigue que $\lim\limits_{x\downarrow -\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x\uparrow +\infty} g(x)$ existen en $\overline{\mathbb{R}}$.

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada en el ejercicio (7), definimos $\lambda_g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ extendiendo aditivamente los siguientes valores:

a) $\lambda_g((a, b]) = g(b) - g(a)$

b) $\lambda_g((-\infty, b]) = g(b) - \lim\limits_{x\downarrow -\infty} g(x)$

c) $\lambda_g((a, +\infty)) = \lim\limits_{x\uparrow +\infty} g(x) - g(a)$

d) $\lambda_g((-\infty, +\infty)) = \lim\limits_{x\uparrow +\infty} g(x) - \lim\limits_{x\downarrow -\infty} g(x)$

Sin mayores cambios a la prueba del teorema 7.14 y usando la continuidad por la derecha de g, se prueba que $\lambda_g : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una casi medida σ-finita (ver el ejercicio (130)) y por el teorema 7.11 y 7.12 ésta admite una

única extensión $\overline{\lambda_g}$ a una σ-álgebra que contiene a $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Si denotamos por $\mathcal{A}_g^*$ la σ-álgebra de los λ_g^*-medibles, entonces llamamos a $\overline{\lambda}_g : \mathcal{A}_g^* \to \overline{\mathbb{R}}$ la **medida de Lebesgue-Stieltjes generada por** g.

Observaciones 8.10. $\mathcal{A}_g^*$ es la λ_g-compleción de $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ y en general no coincide con $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^*$. Por otro lado modificando un poco los argumentos, se obtiene que los teoremas 8.6, 8.7 y la regularidad 8.10 permanecen válidos para $\overline{\lambda}_g : \mathcal{A}_g^* \to \overline{\mathbb{R}}$.

Capítulo 9

Modos de convergencia

1. Introducción

En este capítulo se introducen diversos modos en los que una sucesión de funciones medibles converge a una función medible. En los capítulos anteriores se introdujeron la convergencia casi dondequiera y la convergencia en los espacios $\mathcal{L}_p$ $(1 \le p \le \infty)$, aquí agregamos otros dos tipos de convergencia y los comparamos todos entre si. Se definen también las correspondientes nociones de sucesiones de Cauchy para cada tipo y se establecen los teoremas de Riesz-Weyl y Egorov. Todas las funciones en cuestión toman valores reales.

Definición 9.1. Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n) \subset \mathbb{M}(X, S)$ una sucesión de funciones. Decimos que:

i) (f_n) **converge casi dondequiera** a $f \in \mathbb{M}(X, S)$ si existe $N \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que:
$$f_n(x) \to f(x) \text{ si } x \in X - N.$$

ii) (f_n) **converge en medida** a $f \in \mathbb{M}(X, S)$ si
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0 \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$
y lo denotaremos $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ ó $f_n \to f$ en μ.

iii) (f_n) **converge casi uniformemente** a $f \in \mathbb{M}(X, S)$ si para todo $\delta > 0$ existe $F \in S$ con $\mu(F) < \delta$ y tal que (f_n) converge uniformemente a f en $X - F$ y lo denotamos
$$f_n \xrightarrow[c.u.]{} f \text{ ó } f_n \to f \text{ (c.u.)}$$

Finalmente, si además $f_n \in \mathcal{L}_p(\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ $1 \le p < \infty$, entonces decimos que:

iv) (f_n) **converge en media** p a $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, si $\| f_n - f \|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$ y lo denotamos
$$f_n \underset{\mathcal{L}_p}{\longrightarrow} f.$$

Note que si $f_n \to f$ en alguno de los modos definidos, entonces $f_{n_k} \to f$ en el mismo modo para cualquier subsucesión (f_{n_k}) de (f_n).

Comenzaremos examinando la relación entre convergencia en media p y convergencia en medida.

Teorema 9.2. [8] Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $p \in [1, +\infty)$ fijo y (f_n) una sucesión de funciones que convergen en media p a $f \in \mathcal{L}_p$, entonces $f_n \underset{\mu}{\to} f$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ dadas y $A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, entonces:
$$\varepsilon^p \chi_{A_n(\varepsilon)} \leq |f_n - f|^p \chi_{A_n(\varepsilon)} \in \mathcal{L}_1(\mu)$$
por lo que:
$$\varepsilon^p \mu(A_n(\varepsilon)) \leq \int_{A_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \| f_n - f \|_p^p$$
o bien
$$\mu(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \| f_n - f \|_p^p \text{ de donde } f_n \underset{\mu}{\to} f.$$

□

El recíproco del teorema anterior es falso, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo 9.3. Sean $X = [0,1]$, $S = \mathbb{B}_{[0,1]}$, $\lambda =$ medida de Lebesgue sobre S, $p \in [1, +\infty)$ fija y $(f_n) \subset \mathcal{L}_p(\lambda)$ dada por $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$. Sea $\varepsilon > 0$ fija, entonces:
$$\{x \in X : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} [0, \frac{1}{n}] & \text{si } \varepsilon \leq n, \\ \emptyset & \text{si } \varepsilon > n, \end{cases}$$

[8] La última desigualdad es un caso particular de la desigualdad de Tchebyshev, ver el ejercicio (106). También, vea el ejercicio (107) en donde se define una métrica (debida a F. Riesz) en la que convergencia en medida equivale a convergencia en dicha métrica, si $\mu(X) < +\infty$.

en cualquier caso:
$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{n}$$
lo que prueba que $f_n \underset{\lambda}{\to} 0$. Por otro lado (f_n) no converge en media p a alguna función, pues de hacerlo sería $\| \, \|_p$-Cauchy pero:
$$\| f_{2n} - f_n \|_p^p = n^{p-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora examinaremos que relación hay entre la convergencia de $\mathcal{L}_p$ y convergencia c.d.

En el ejemplo anterior es inmediato comprobar que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in (0, 1]$ i.e. $f_n \to 0$ c.d. por lo que la convergencia c.d. no implica convergencia en $\mathcal{L}_p$, aún si la medida del espacio es finita. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.4. (Teorema de la convergencia dominada en $\mathcal{L}_p$) Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $p \in [1, +\infty)$ fija y $(f_n) \subset \mathcal{L}_p(\mu)$ una sucesión de funciones que convergen c.d. a $f \in \mathbb{M}(X, S)$. Supóngase que existe $g \in \mathcal{L}_1^+(\mu)$ tal que:
$$|f_n|^p \leq g \text{ (c.d.)} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ entonces } f \in \mathcal{L}_p(\mu) \text{ y } f_n \underset{\mathcal{L}_p}{\longrightarrow} f.$$

Demostración. Como $f_n \to f$ c.d. entonces $|f|^p \leq g$ c.d. también y como
$$|f_n - f|^p \leq 2^p \in \mathcal{L}_1(\mu)$$
se sigue del teorema de la convergencia dominada usual que
$$\| f_n - f \|_p^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0.$$

□

Por otro lado convergencia en media p ($p \in [1, +\infty)$) no implica convergencia c.d. como lo demuestra el siguiente

Ejemplo 9.5. Sean $X = [0,1]$, $S = \mathbb{B}_{[0,1]}$ y $\lambda =$ la medida de Lebesgue en S. Sean $I_1, I_2, \ldots$ la sucesión de intervalos:
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \ldots$$

y definimos $f_n = \chi_{I_n}$, entonces $f_n \in \mathcal{L}_p(\lambda)$ $(p \in [1, +\infty)$ fija) para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\| f_n \|_p = \lambda(I_n)^{\frac{1}{p}}$ por lo que $f_n \xrightarrow[\mathcal{L}_p]{} 0$.

Sin embargo $(f_n(x))$ diverge para cada $x \in [0,1]$, pues para todo $x \in [0,1]$ y para todo $N \in \mathbb{N}$ dados existen $m, n \geq N$ tales que $f_m(x) = 1$ y $f_n(x) = 0$.

2. El teorema de Riesz-Weyl

A pesar de que convergencia en media p $(p \in [1, +\infty))$ no implica convergencia c.d., es posible seleccionar una subsucesión que si converja c.d., este hecho se estableció de manera implícita en la prueba de teorema de Riesz-Fischer (6.8). por lo que se invita al lector a examinarla nuevamente. Esto también será consecuencia de un teorema más general que se probará en (9.7).

Definición 9.6. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n) \subset \mathbb{M}(X, S)$ una sucesión. Decimos que (f_n) es de **Cauchy en medida** (o fundamental en medida), denotado **C.** μ. si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Observamos que si $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$, entonces (f_n) es C. μ. Esto se sigue de la siguiente contención válida para todo $\varepsilon > 0$:

$$\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

la cual es inmediata si se toman complementos y se apela a la desigualdad del triángulo.

Ahora establecemos uno de los resultados más importantes y útiles de este capítulo

Teorema 9.7. (F. Riesz-H. Weyl) Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n) \subset \mathbb{M}(X, S)$ una sucesión C. μ.

Entonces existe $f \in \mathbb{M}(X, S)$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que:

i) $f_{n_k} \to f$ (c.d.) y

ii) $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

En particular toda sucesión C. μ. es convergente en μ.

Demostración. Como (f_n) es C. μ., es posible construir una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que si

$$E_k = \left\{x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

entonces $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$.

Sea $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ y $\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, llamamos E a este conjunto.

Como $\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) < +\infty$, se tiene que $\mu(E) = 0$ (ver el ejercicio (32)):

Sea $x \in X - F_p$ arbitraria, entonces si $i > j > p$, tenemos que:

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| < \sum_{l=j}^{i-1} \frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^{j-1}} \qquad (9.1)$$

Esto prueba que $(f_n(x))$ es uniformemente de Cauchy en $X - F_p$ y como

$$X - E = \bigcup_{p=1}^{\infty} (X - F_p),$$

$(f_n(x))$ converge para todo $x \in X - E$

Definimos $f : X \to \mathbb{R}$, poniendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E. \\ \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} & \text{si } x \in X - E. \end{cases}$$

entonces $f_{n_k} \to f$ c.d.

Sea $\varepsilon > 0$, hallamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2}$, a continuación consideramos $x \in X - F_p$ arbitraria. Pasando al límite en la relación (9.1) obtenemos que

$$|f(x) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } j > p,$$

lo que implica:

$$\left\{x \in X : |f(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset F_p$$

por lo que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \leq \mu(F_p) < \frac{1}{2^{p-1}} < \varepsilon$$

si $j > p$, lo que demuestra que $f_{n_j} \underset{\mu}{\rightarrow} f$. Para probar que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ basta recordar la contención:

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

y usar el hecho de que (f_n) es C. μ. Los detalles se dejan al lector.

□

Observaciones 9.8.

1. Si $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ y $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} g$, entonces $f = g$ c.d.
2. Si $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ y $f_n \rightarrow g$ c.d., entonces $f = g$ c.d.
3. Si $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ y $g_n = f_n$ c.d. para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $g_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$.

Demostración.

1. Como $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ es suficiente probar que $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Pero

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

y el resultado se sigue inmediatamente de la hipótesis.

2. Como (f_n) es C. μ. se sigue de 9.6 que existe $h \in \mathbb{M}(X, S)$ y una subsucesión (f_{n_k}) tal que: $f_{n_k} \rightarrow h$ c.d. y $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} h$.

   Pero como también $f_{n_k} \rightarrow g$ c.d., tenemos que $h = g$ c.d. y como por hipótesis $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ se sigue del inciso anterior que $f = h$ c.d. por lo que $f = g$ c.d.

3. Sea $N_n \in \mathcal{N}(\mu)$ tal que $f_n(x) = g_n(x)$ para todo $x \in X - N_n$, entonces si $\varepsilon > 0$ y $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ se tiene que:

$$\{x \in X : |g_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset N \cup \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando medida y pasando al límite se obtiene nuestro resultado.

□

Con ayuda del teorema 9.7 y las observaciones 9.8 se puede obtener el siguiente teorema:

Teorema 9.9. (Convergencia dominada en medida) Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $p \in [1, +\infty)$ fijo y $(f_n) \subset \mathcal{L}_p(\mu)$ una sucesión de funciones tal que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f \in \mathbb{M}(X, S)$.

Si existe $g \in \mathcal{L}_1^+(\mu)$ tal que $|f_n|^p \leq g$ c.d. para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $f_n \underset{\mathcal{L}_p}{\longrightarrow} f$.

Demostración. Ejercicio (108).

□

En el contexto de la Teoría de la Probabilidad, la convergencia en medida se conoce como **convergencia en probabilidad** y constituye una de sus herramientas más importantes y básicas.

El siguiente resultado muestra que la convergencia en medida "conserva desigualdades", y como convergencia en media p, $p \in [1, +\infty)$, implica convergencia en medida, el resultado es válido para este tipo de convergencia también.

Teorema 9.10.

1. Si $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ con $f_n \geq 0$ c.d., entonces $f \geq 0$ c.d.

2. Si $f_n, f, g \in \mathbb{M}(X,S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ son tales que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ y $f_n \leq g$ c.d. para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f \leq g$ c.d.

Demostración.

1. Al modificar cada f_n en un conjunto de medida cero podemos suponer que $f_n \geq 0$ en X, pues por 9.8.3) se tiene que la sucesión modificada cumple también que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$. Como

$$\{x \in X : f(x) < 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) \leq \frac{-1}{m}\right\}$$

basta probar que $\mu(\{x \in X : f(x) \leq -\varepsilon\}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Si $f(x) < -\varepsilon$. dado que $f(x) = (f(x) - f_n(x)) + f_n(x) \geq f(x) - f_n(x)$. entonces
$f(x) - f_n(x) \leq -\varepsilon$: en particular. $|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon$.

i.e. $\{x \in X : f(x) \leq -\varepsilon\} \subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. tomando medida y pasando al límite probamos la afirmación.

2. $g - f_n \geq 0$ c.d. y claramente $g - f_n \underset{\mu}{\rightarrow} g - f$. Por el inciso anterior $g - f \geq 0$ c.d.

□

Como consecuencia del trabajo previo en convergencia en medida es fácil establecer el:

Teorema 9.11.

1. Sea $(f_n) \subset \mathbb{M}(X,S)$ una sucesión tal que $f_n \geq 0$ c.d.. Supongamos que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$, entonces $\int f\, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$ (Lema de Fatou en μ).

2. Sea $(f_n) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$ una sucesión tal que $f_n \leq f_{n+1}$ c.d.. Si $\left(\int f_n\, d\mu\right)$ es una sucesión acotada y $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ para alguna $f \in \mathbb{M}(X,S)$. entonces $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y $\int f\, d\mu = \lim_{n\uparrow\infty} \int f_n\, d\mu$. (T.C.M. en medida).

Demostración. Ver el ejercicio (108).

□

A continuación pasamos a examinar la convergencia casi uniforme (c.u.) y sus relaciones con otros tipos de convergencia. (ver 9.1 iii)).

Teorema 9.12. Si $(f_n) \subset \mathbb{M}(X,S)$ es una sucesión de funciones que converge c.u. a $f \in \mathbb{M}(X,S)$ entonces:

1. $f_n \rightarrow f$ c.d.

2. $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$

Demostración.

1. $f_n \rightarrow f$ c.d.

   Para $\delta = \frac{1}{n}$. hallamos $F_n \in S$ con $\mu(F_n) < \frac{1}{n}$ y tal que (f_n) converge uniformemente a f en $X - F_n$. Sea $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $\mu(F_0) = 0$ y si $x \notin F_0$ existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X - F_N$ por lo que $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

2. Sean $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, entonces existe $F \in S$ con $\mu(F) < \delta$ y $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tales que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $x \in X - F$, equivalentemente:

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset F, \quad \text{si } n \geq N.$$

   Así pues, $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$ si $n \geq N$. Por lo tanto $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$.

□

Observaciones 9.13. Convergencia c.u. no implica convergencia en media $p \in [1, +\infty)$, aún en el caso de que $\mu(X) < +\infty$, como lo muestra el ejemplo 9.3.

Por otro lado convergencia en medida tampoco implica convergencia c.u. como lo muestra el ejemplo 9.5, aunque es posible recuperar un recíproco parcial el cual ya surgió dentro de la demostración del teorema de Riesz-Weyl y que a continuación hacemos explícito.

Teorema 9.14. (F. Riesz - H. Weyl). Sea $(f_n) \subset \mathbb{M}(X,S)$ una sucesión que converge a $f \in \mathbb{M}(X,S)$ en medida, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $f_{n_k} \to f$ c.u.

Demostración. Como $f_n \underset{\mu}{\to} f$, entonces (f_n) es C. μ.. Siguiendo el argumento y la notación del teorema 9.7 y en particular la relación marcada con (9.1), se deduce que:

Si $i > j > p$ y $x \in X - F_p$ entonces:

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| < \frac{1}{2^{j-1}},$$

lo que prueba que la subsucesión (f_{n_k}) es uniformemente de Cauchy en $X - F_p$ (con $\mu(F_p) < \frac{1}{2^{p-1}}$) y en consecuencia converge uniformemente en $X - F_p$ a cierta función $\tilde{f} \in \mathbb{M}(X,S)$. Además, por 9.7 i) $f_{n_k} \underset{\mu}{\to} f$.

Pero $f_{n_k} \underset{\mu}{\to} f$ también, así que por 9.8.1) $f = \tilde{f}$ c.d., es claro que entonces $f_{n_k} \to f$ c.u.

□

Como es de esperarse diremos que $(f_n) \subset \mathbb{M}(X,S)$ es de **Cauchy casi uniformemente**, lo que será denotado C.c.u. si para todo $\delta > 0$ existe $F \in S$ con $\mu(F) < \delta$ tal que (f_n) es uniformemente de Cauchy en $X - F$. Es claro que el criterio de Cauchy se satisface para este tipo de convergencia.

3. El teorema de Egorov

Es bien sabido que la convergencia puntual de una sucesión de funciones no implica la convergencia uniforme y para que esto ocurra las hipótesis son muy restrictivas (v. gr. el teorema de U. Dini para sucesiones monótonas de funciones continuas), es por esto que el siguiente teorema debido a D. F. Egorov (1869-1931) resulta algo sorprendente y de gran utilidad.

Teorema 9.15. (D.F. Egorov, 1913) Sea (X,S,μ) un espacio de medida **finita**, $(f_n) \subset \mathbb{M}(X,S)$ una sucesión y $f \in \mathbb{M}(X,S)$ tal que $f_n \to f$ c.d., entonces $f_n \to f$ c.u. (y por lo tanto, $f_n \underset{\mu}{\to} f$ por 9.12).

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ dadas definimos

$$C_k(\varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Denotamos por $A = \{x \in X : f_n(x) \to f(x)\}$, entonces por hipótesis

$$0 = \mu(X - A) = \mu(X) - \mu(A).$$

Claramente

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} C_k(\varepsilon) \left(= \varliminf_{k\to\infty} C_k(\varepsilon)\right),$$

así pues:

$$\mu(X) = \mu(A) \leq \mu\left(\varliminf_{k\to\infty} C_k(\varepsilon)\right) \leq \lim_{n\uparrow\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} C_k(\varepsilon)\right) \leq \mu(X),$$

de donde

$$\mu(X) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} C_k(\varepsilon)\right)$$

o bien dado que μ es finita obtenemos:

$$\lim_{n\uparrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu\left(X - \bigcap_{k=n}^{\infty} C_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

(Note que si en este momento aplicáramos el ejercicio (109), la prueba habría terminado).

Para $\delta > 0$ arbitraria y $m \in \mathbb{N}$ dada, hallamos $n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_m}^{\infty}\left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}\right) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Sea

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_m}^{\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Entonces $\mu(F) < \delta$ y si $x \notin F$ implica $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $k \geq n_m$ por lo tanto, $f_n \to f$ uniformemente en $X - F$.

□

Observación 9.16. La conclusión de el teorema de Egorov falla si $\mu(X) = +\infty$, o bien si la función límite toma valores extendidos en un conjunto de medida positiva (ver el ejercicio (110)).

Por otro lado es posible establecer una versión del teorema de Egorov sin suponer que $\mu(X) < +\infty$, si en su lugar se supone la existencia de una función en $\mathcal{L}_p$ $(p \in [1, +\infty))$ que domine una sucesión convergente c.d., a saber:

Teorema 9.17. (Convergencia dominada de Egorov) Sea $(f_n) \subset \mathbb{M}(X, S)$ una sucesión tal que $f_n \xrightarrow[c.d.]{} f$ con $f \in \mathbb{M}(X, S)$.

Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_p^+(\mu)$ $(p \in [1, +\infty)$ fija) tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n \xrightarrow[c.u.]{} f$ (y por lo tanto $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ por 9.12)

Demostración. Sea $N = \{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \in \mathcal{N}$, entonces como $|f| \leq g$ en $X - N$ obtenemos que $|f_n - f| \leq 2g$ en $X - N$. Sean $\varepsilon > 0$ fija y

$$D_k(\varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

entonces:

$$D_k(\varepsilon) - N \subset \{x \in X : 2g(x) \geq \varepsilon\} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

de donde:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(\varepsilon) - N \subset \{x \in X : 2g(x) \geq \varepsilon\},$$

y por la desigualdad de Tchebyshev(ejercicio (106)):

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(\varepsilon)\right) \leq \mu(\{x \in X : 2g(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int (2g)^p \, d\mu < +\infty.$$

Por otro lado

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k(\varepsilon) \in \mathcal{N},$$

pues $f_n \xrightarrow[c.d.]{} f$ y como $\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k(\varepsilon)$ tiene medida finita, se obtiene que:

$$\lim_{n \uparrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

Aplicando el ejercicio (109) o continuando como en la parte final de 9.14, concluimos que $f_n \to f$ c.u.

□

Finalmente examinamos la convergencia para sucesiones en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$. Como se probó en 6.14, este tipo de convergencia satisface el criterio de Cauchy y equivale a la convergencia uniforme casi dondequiera. Denotaremos por $f_n \to f$ **u.c.d.** a la convergencia de dicho tipo.

Observaciones 9.18. Es evidente que convergencia u.c.d. implica convergencia c.u. y en consecuencia implica la convergencia c.d. y la convergencia en μ (9.12).

Si además $\mu(X) < +\infty$, entonces la convergencia u.c.d. implica convergencia en media $p \in [1, +\infty)$, pero esto no es válido si $\mu(X) = +\infty$, como lo muestra el ejemplo

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,2^n]} \quad \text{para todo } n \text{ y } f = 0 \text{ sobre } (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \lambda).$$

Sin embargo, si la sucesión esta dominada en valor absoluto por una función en $\mathcal{L}_p^+(\mu)$, entonces la convergencia u.c.d. implica la convergencia en media p, aún si $\mu(X) = +\infty$.

Ejemplo 9.19. La convergencia u.c.d. es más fuerte que los otros tipos de convergencia aún si $\mu(X) < +\infty$.

Sean $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{2^n}]}$ para todo n y $f = 0$ sobre $([0,1], \mathbb{B}_{[0,1]}, \lambda)$ entonces $f_n \to 0$ c.d., c.u., en μ y en $\mathcal{L}_p$, pero no converge u.c.d. ya que para todo $n \in \mathbb{N} : \| f_{2n} - f_n \|_\infty = n$.

Finalmente enunciamos (sin demostrarlo) un teorema que sumariza las propiedades de los diversos tipos de convergencia con respecto a algunas operaciones sobre las sucesiones.

Teorema 9.20. Sean (f_n) y $(g_n) \subset \mathbb{M}(X, S)$ sucesiones de funciones y $c \in \mathbb{R}$. Si $(*)$ representa en cada caso la convergencia c.d., en μ, en $\mathcal{L}_p$ $([1, +\infty))$, c.u. ó u.c.d., entonces $f_n \to f$ $(*)$ y $g_n \to g$ $(*)$ implican que:

1. $cf_n \to cf$ $(*)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
2. $f_n + g_n \to f + g$ $(*)$.

3. $|f_n| \to |f|$ $(*)$.
4. $\max\{f_n, g_n\} \to \max\{f, g\}$ $(*)$ y $\min\{f_n, g_n\} \to \min\{f, g\}$ $(*)$.
5. $f_n^+ \to f^+$ $(*)$ y $f_n^- \to f^-$ $(*)$.
6. $\chi_E f_n \to \chi_E f$ $(*)$ para todo $E \in S$.

CAPÍTULO 10

Medidas con signo

1. Introducción

En este capítulo se generaliza el concepto de medida cuando la función conjuntista llamada medida con signo toma valores positivos y negativos. Se demuestra que toda medida con signo es la diferencia de dos medidas con al menos una de ellas finita. A continuación se introducen los conceptos de continuidad absoluta y de singularidad en el espacio de las medidas con signo, se prueban algunas de sus propiedades fundamentales y se establecen tres de los teoremas más importantes en Teoría la Medida: 10.18, 10.22 y 10.23.

Definición 10.1. Sea (X, S) un espacio medible. Una **medida con signo** en (X, S) es una función conjuntista $\nu :\to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

a) $\nu(\emptyset) = 0$

b) ν toma a lo más uno de los valores extendidos $+\infty$ ó $-\infty$.

c) Si (E_i) es una sucesión disjunta de elementos de S, entonces:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(E_i)$$

en donde la igualdad anterior debe entenderse como sigue:

Si $\left|\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\right| < +\infty$, entonces la serie converge absolutamente y si

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = +\infty \text{ ó } -\infty.$$

entonces la serie converge (en el sentido extendido) a $+\infty$ ó $-\infty$, respectivamente.

Diremos que ν es **finita** si $|\nu(E)| < +\infty$ para todo $E \in S$ y **σ-finita** si existe (E_n) una sucesión de elementos de S tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ y } |\nu(E_n)| < +\infty \quad \text{si } n \geq 1.$$

Teorema 10.2. Sea (X, S) un espacio medible y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo.

i) Si E, F son elementos de S con $E \subset F$ y $|\nu(F)| < +\infty$, entonces $|\nu(E)| < +\infty$ y $\nu(F - E) = \nu(F) - \nu(E)$. (Sustractividad).

ii) Si (E_n) es una sucesión monótona (i.e. $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ ó $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$) y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\nu(E_{k_0})| < +\infty$, entonces $\nu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$.

Demostración.

i) Por 10.1 a), b) y c) se sigue que ν es aditiva, por lo que

$$\nu(F) = \nu(F - E) + \nu(E).$$

Si alguno o ambos sumandos fuesen infinitos, entonces $\nu(F)$ sería infinito también, por lo que necesariamente ambos sumandos son finitos, así pues

$$|\nu(E)| < +\infty \quad \text{y} \quad \nu(F - E) = \nu(F) - \nu(E).$$

ii) Usando la sustractividad probada en i), la demostración es idéntica a la de 3.5 salvo que los límites no son necesariamente monótonos. Asimismo, la condición $|\nu(E_{k_0})| < +\infty$ es sólo necesaria para sucesiones decrecientes.

$\square$

Ejemplo 10.3.

1. Sean $\mu_1, \mu_2 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ dos medidas con alguna de ellas finita, entonces $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por: $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) \quad (E \in S)$ es una medida con signo.

2. Sean $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida y $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ dada. Definimos $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ poniendo
$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in S),$$
entonces ν es una medida con signo finita.

   Para establecerlo notamos que si
$$\mu_1(E) = \int_E f^+ \, d\mu \text{ y } \mu_2(E) = \int_E f^- \, d\mu \quad (E \in S)$$
entonces μ_1 y μ_2 son medidas finitas (ver el ejercicio (42)) y $\nu = \mu_1 - \mu_2$, así pues por el ejemplo anterior, ν es una medida con signo finita.

2. El teorema de descomposición de Hahn y de Jordan

Probaremos que toda medida con signo ν es siempre la diferencia de dos medidas con alguna de ellas finita, para esto es necesario definir algunos conceptos.

Definición 10.4. Sean (X, S) un espacio medible y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo.

a) Un conjunto $A \in S$ se llama **positivo para** ν si $\nu(E) \geq 0$ para todo $E \subset A$, con $E \in S$.

b) Un conjunto $B \in S$ se llama **negativo para** ν si $\nu(E) \leq 0$ para todo $E \subset B$, con $E \in S$.

c) Un conjunto $N \in S$ se llama **nulo para** ν si $\nu(E) = 0$ para todo $E \subset N$ con $E \in S$.

Propiedades 10.5.

1. Si A es positivo para ν, entonces:

$$\nu|_{S\cap A}: S\cap A \to \overline{\mathbb{R}}$$

es una medida en $(A, S\cap A)$. Análogamente si B es negativo para ν, entonces

$$-\nu|_{S\cap B}: S\cap B \to \overline{\mathbb{R}}$$

es una medida en $(B, S\cap B)$.

2. Todo subconjunto S-medible de un conjunto positivo, negativo y nulo para ν es positivo, negativo o nulo para ν (respectivamente).

3. N es nulo para ν si y sólo si N es positivo y negativo para ν.

En el ejemplo 10.3 2), es fácil comprobar que

$$A = \{x \in X : f(x) > 0\} \quad B = \{x \in X : f(x) < 0\}$$
$$\text{y } N = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

son un conjunto positivo, negativo y nulo para ν (respectivamente).

Teorema 10.6. Sean (X, S) un espacio medible y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Si (A_n) es una sucesión de subconjuntos positivos para ν, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es positivo para ν (análogamente para negativos y nulos para ν).

Demostración. Como $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1)$ y $A_1 - A_2$, $A_1 \cap A_2$ y $(A_2 - A_1)$ son positivos para ν y son ajenos, entonces para todo $E \subset A_1 \cup A_2$, con $E \in S$, se tiene por la aditividad de ν que: $\nu(E) = \nu(E \cap (A_1 - A_2)) + \nu(E \cap A_1 \cap A_2) + \nu(E \cap (A_2 - A_1)) \geq 0$ lo que prueba que $A_1 \cup A_2$ es positivo. Por inducción se sigue que $C_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ es positivo para ν. Claramente $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$.

Sea $E \subset A$, con $E \in S$, arbitrario, entonces $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k \cap E)$, y por 10.2 ii) se tiene que: $\nu(E) = \lim_{k\to\infty} \nu(C_k \cap E) \geq 0$, por lo tanto, A es positivo para ν.

□

Asociada a toda medida con signo existe una descomposición (no única) $X = A \cup B$ con $A, B \in S$ disjuntos con A positivo y B negativo para ν.

Teorema 10.7. [9](De la descomposicion de H.Hahn (1920)) Sea (X, S) un espacio medible y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo, entonces existen conjuntos complementarios no necesariamente únicos tales que A es positivo para ν y B es negativo para ν.

Demostración. Como ν toma a lo más un valor extendido, podemos suponer que $-\infty < \nu(E) \leq +\infty$ (de no ser asi consideramos la medida con signo $-\nu$).

Definimos $\beta = \inf\{\nu(B) : B \text{ es negativo para } \nu\}$ y hallamos una sucesión $(B_n)_1^{\infty}$ de conjuntos negativos para ν tal que $\beta = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n)$. Por 10.6. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es negativo para ν y por definición de β se tiene que $\beta \leq \nu(B)$. por otro lado $B_n \subset B$ y $B - B_n$ es negativo, asi pues

$$\nu(B) = \nu(B_n) + \nu(B - B_n) \leq \nu(B_n) \qquad \text{para todo } n$$

en consecuencia $\beta = \nu(B) \in (-\infty, 0]$. Sea $A = X - B$, entonces será suficiente probar que A es positivo para ν.

Supongamos que A **no** es positivo, entonces A contiene un subconjunto E_0 tal que $\nu(E_0) < 0$. E_0 no puede ser negativo para ν, pues si lo fuera entonces $B \cup E_0$ sería negativo para ν y $\nu(B \cup E_0) = \beta + \nu(E_0) < \beta$ contrario a la definición de β. Así que E_0 contiene un subconjunto medible de medida positiva. Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ el **menor natural** tal que E_0 contiene un subconjunto $E_1 \in S$ con $\nu(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$.

Como $|\nu(E_0)| = -\nu(E_0) < +\infty$ y $E_1 \subset E_0$ se tiene por 10.2 i) que $\nu(E_1) < +\infty$ y por sustractividad:

$$\nu(E_0 - E_1) = \nu(E_0) - \nu(E_1) \leq \nu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Repitiendo el argumento usado para E_0, ahora para $E_0 - E_1$ concluimos que $E_0 - E_1$ no puede ser negativo para ν y definimos k_2 como el **menor natural** tal que $E_0 - E_1$ contiene un subconjunto $E_2 \in S$ con $\nu(E_2) \geq \frac{1}{k_2}$. De manera inductiva, hallamos subconjuntos ajenos $E_1, E_2, \ldots, E_n \in S$ contenidos en E_0 tales que $\nu(E_j) \geq \frac{1}{k_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ con k_j el **menor natural** tal que

[9] La descomposición $X = A \cup B$ se conoce como una **descomposición de Hahn** para ν y la denotaremos como $(A \mid B)$.

$E_0 - \bigcup_{l=1}^{j-1} E_l$ contiene algún subconjunto medible con medida mayor igual que $\frac{1}{k_j}$. Por σ-aditividad obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) < +\infty$$

(pues $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset E_0$ y $|\nu(E_0)| < +\infty$), por lo que necesariamente $k_j \to +\infty$ si $j \to +\infty$. Sea $F_0 = E_0 - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces si $F \subset F_0$, con $F \in S$, se tiene que $\nu(F) \leq 0$ pues si $\nu(F) > 0$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(F) \geq \frac{1}{l}$ y como $F \subset E_0 - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ se sigue de la definición de k_n que $k_n \leq l$ para todo n, lo cual no es posible, con lo que se prueba que F_0 es negativo para ν y ajeno a B, asi que $B \cup F_0$ es negativo para ν y $\nu(B \cup F_0) < \beta$ contradiciendo la definición de β. Por lo tanto A **es positivo para** ν.

□

Teorema 10.8. Sean $(A_1 \mid B_1)$ y $(A_2 \mid B_2)$ descomposiciones de Hahn para ν, entonces éstas son ν-esencialmente iguales en el sentido de que $A_1 \triangle A_2$ y $B_1 \triangle B_2$ son ν-nulos.

Demostración. Sea $E \subset A_1 \triangle A_2$, $E \in S$ entonces

$$\nu(E) = \nu(E \cap (A_1 - A_2)) + \nu(E \cap (A_2 - A_1))$$

como $E \cap (A_1 - A_2) \subset A_1$ y $E \cap (A_2 - A_1) \subset A_2$ se sigue que $\nu(E) \geq 0$. Por otro lado como

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset B_2 \quad \text{y} \quad E \cap (A_2 - A_1) \subset B_1$$

se sigue que $\nu(E) \leq 0$ asi que $\nu(E) = 0$. La prueba de que $B_1 \triangle B_2$ es ν-nulo es totalmente análoga.

□

Dados un espacio medible (X, S) y una medida con signo $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ es posible construir a partir de **cualquier** descomposición de Hahn $(A \mid B)$ para ν, dos medidas $\nu^+ \nu^- : S \to \overline{\mathbb{R}}$ alguna de ellas finita tal que $\nu = \nu^+ - \nu^-$, probando de este modo que la forma general de una medida con signo es la del ejemplo 10.3 i), este hecho es el contenido del siguiente teorema:

Teorema 10.9. (Descomposición de C. Jordan) Sea (X, S) un espacio medible y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Entonces existen dos medidas $\nu^+, \nu^- : S \to \overline{\mathbb{R}}$ llamada la **variación positiva** de ν y la **variación negativa** de ν (respectivamente) alguna de ellas finita tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Demostración. Sea $(A \mid B)$ una descomposición de Hahn para ν. Definimos $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \text{ y } \nu^-(E) = -\nu(E \cap B) \quad (E \in S).$$

Como A es positivo para ν y B es negativo para ν, se sigue que ν^+ y ν^- son funciones no-negativas. $\nu^+(\emptyset) = 0 = \nu^-(\emptyset)$ y son σ-aditivas por ser contracciones de ν.

Sea $E \in S$ arbitrario, entonces:

$$\nu(E) = \nu(E \cap (A \cup B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu^+(E) - \nu^-(E).$$

Finalmente, si $\nu(E) = +\infty$, entonces por 10.1 b), $\nu(E \cap B) > -\infty$, por lo tanto

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = +\infty \text{ y } \nu^- \text{ es finita.}$$

Análogamente si $\nu(E) = -\infty$, entonces $\nu^-(E) = +\infty$ y ν^+ es finita.

□

Observación 10.10. La descomposición de Jordan : $\nu = \nu^+ - \nu^-$ de una medida con signo ν **no** depende de la descomposición de Hahn para ν, pues si $(A_i \mid B_i)$ $i = 1, 2$ son descomposiciones de Hahn para ν y $E \in S$ es arbitrario entonces como $A_1 \triangle A_2$ es nulo para ν (10.8) obtenemos:

$$\nu(E \cap A_1) = \nu(E \cap A_1) + \nu(E \cap (A_2 - A_1)) = \nu(E \cap (A_1 \cup A_2))$$

$$= \nu(E \cap A_2) + \nu(E \cap (A_1 - A_2)) = \nu(E \cap A_2)$$

de manera idéntica se prueba que $\nu(E \cap B_1) = \nu(E \cap B_2)$.

Definición 10.11. Sea (X, S) un espacio de medida y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Entonces, la medida $\nu^+ + \nu^- : S \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama la **variación total** de ν y se denota $|\nu|$.

Algunas propiedades de las medidas ν^+, ν^- y $|\nu|$ asociadas a ν son las siguientes:

$$\nu^-(E) \leq \nu(E) \leq \nu^+(E), \quad |\nu(E)| \leq |\nu|(E) \quad \text{para todo } E \in S.$$

$N \in S$ es nulo para ν si y sólo si $|\nu|(N) = 0$. (ver los ejercicios (121) y (122) en donde se obtienen definiciones alternativas para ν^+, ν^- y $|\nu|$).

Ejemplo 10.12. Si ν es como en el ejemplo 10.2, entonces

$$A = \{x \in X : f(x) \geq 0\} \text{ y } B = \{x \in X : f(x) < 0\}$$

constituye una descomposición de Hahn para ν, en consecuencia

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- \, d\mu$$

y

$$|\nu|(E) = \int_E |f| \, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Definición 10.13. Sean (X, S) un espacio de medida y $\mu_1, \mu_2 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ dos medidas. Decimos que μ_1 y μ_2 son **mutuamente singulares** (denotado $\mu_1 \perp \mu_2$) si existen subconjuntos medibles y complementarios A y B tales que: $\mu_1(B) = 0 = \mu_2(A)$ (v.gr. si ν es una medida con signo entonces $\nu^+ \perp \nu^-$). Diremos que μ_2 es **absolutamente continua con respecto a** μ_1 (denotado por $\mu_2 \ll \mu_1$) si $\mu_2(E) = 0$ siempre que $\mu_1(E) = 0$.

Extendemos las definiciones anteriores para medidas con signo como sigue: ν_1 y ν_2 son **mutuamente singulares** (denotado por $\nu_1 \perp \nu_2$), si sus variaciones totales lo son (i.e. si $|\nu_1| \perp |\nu_2|$) y diremos que ν_2 es **absolutamente continua con respecto a** ν_1 denotado $\nu_2 \ll \nu_1$ si $\nu_2(E) = 0$ siempre que $|\nu_1|(E) = 0$.

Las siguientes son algunas consecuencias de las definiciones.

Propiedades 10.14. Sean (X, S) un espacio medible y ν, ν_1, ν_2 medidas con signo en S, entonces:

a) $\nu_1 \perp \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 \perp \nu_1$.

b) $\nu_1 \perp \nu$ y $\nu_2 \perp \nu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \perp \nu$. (Se supone que ν_1 y ν_2 no toman valores extendidos diferentes).

c) $\nu_2 \ll \nu_1 \Leftrightarrow |\nu_2| \ll \nu_1 \Leftrightarrow |\nu_2| \ll |\nu_1| \Leftrightarrow \nu_2^+, \nu_2^- \ll |\nu_1|$.

d) Si $\nu_2 \ll \nu$ y $\nu \perp \nu_1$, entonces $\nu_2 \perp \nu_1$.

e) Si $\nu_1 \ll \nu$ y $\nu_1 \perp \nu$, entonces $\nu_1 \equiv 0$.

Demostración.

a) Es inmediata.

b) Sean $A_1, B_1, A_2, B_2 \in S$ tales que:

$$X = A_i \cup B_i, A_i \cap B_i = \emptyset \quad i = 1, 2 \text{ y } |\nu_1|(B_1) = 0 = |\nu|(A_1)$$

$$|\nu_2|(B_2) = 0 = |\nu|(A_2),$$

entonces $C_1 = B_1 \cap B_2$ y $D_1 = A_1 \cup A_2$ son complementarios y

$$|\nu_1 + \nu_2|(C_1) \leq |\nu_1|(C_1) + |\nu_2|(C_1) = 0 = |\nu|(D_1)$$

(ver el ejercicio (121 ii))).

c) Probaremos las equivalencias en el orden acostumbrado.

Supongamos que $\nu_2 \ll \nu_1$ y que $|\nu_1|(E) = 0$. Sea $(A \mid B)$ una descomposición de Hahn para ν_2 entonces:

$$|\nu_1|(E \cap A) = 0 = |\nu_1|(E \cap B)$$

y por la hipótesis $\nu_2^+(E) = 0 = \nu_2^-(E)$ así que $|\nu_2|(E) = 0$; esto prueba que $|\nu_2| \ll \nu_1$.

Supongamos que $|\nu_2| \ll \nu_1$ y que $|\nu_1|(E) = 0$, entonces

$$|\nu_2|(E) = 0 \text{ por lo que } |\nu_2| \ll |\nu_1|.$$

Supongamos que $|\nu_2| \ll |\nu_1|$, entonces como $\nu_2^+, \nu_2^- \leq |\nu_2|$ es inmediato que $\nu_2^+ \ll |\nu_1|$ y $\nu_2^- \ll |\nu_1|$. Finalmente, si $\nu_2^+, \nu_2^- \ll |\nu_1|$ y $|\nu_1|(E) = 0$ entonces $\nu_2^+(E) = 0 = \nu_2^-(E)$ de donde $\nu_2(E) = (\nu_2^+ - \nu_2^-)(E) = 0$; por lo tanto $\nu_2 \ll \nu_1$.

d) Como $\nu \perp \nu_1$ existen $C, D \in S$ complementarios tales que $|\nu|(C) = 0 = |\nu_1|(D)$. Sea $(A \mid B)$ una descomposición de Hahn para ν_2, entonces como también

$$|\nu|(A\cap C) = 0 = |\nu|(B\cap C)$$

se sigue de la hipótesis que $\nu_2(A\cap C) = 0 = \nu_2(B\cap C)$ por lo que

$$|\nu_2|(C) = 0 = |\nu_1|(D) \quad \text{entonces} \quad \nu_2 \perp \nu_1.$$

e) Sea $(A \mid B)$ una descomposición de Hahn para ν_1. Como $\nu_1 \perp \nu$ existen $C, D \in S$ complementarios tales que:

$$|\nu_1|(C) = 0 = |\nu|(D).$$

Como $\nu_1 \ll \nu$ y $|\nu|(D\cap A) = 0 = |\nu|(D\cap B)$ entonces

$$|\nu_1|(D) = |\nu_1|(D\cap A) + |\nu_1|(D\cap B) = 0,$$

asi pues $|\nu_1|(X) = |\nu_1|(C) + |\nu_1|(D) = 0$, pero para todo $E \in S$:

$$|\nu_1(E)| \leq |\nu_1|(E) \leq |\nu_1|(X) = 0$$

por lo tanto $\nu_1 \equiv 0$.

□

A continuación damos una versión continua de la relación $\nu_2 \ll \nu_1$ en el caso de que $|\nu_2|(X) < +\infty$. (Ver el ejercicio (123)).

Teorema 10.15. Sean (X, S) un espacio medible y $\nu_1, \nu_2 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas con signo tales que $|\nu_2|(X) < +\infty$, entonces:

$$\nu_2 \ll \nu_1 \Leftrightarrow \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

tal que

$$|\nu_2|(E) < \varepsilon \quad \text{para todo } E \in S \text{ con } |\nu_1|(E) < \delta.$$

Demostración.

$\Leftarrow$]

Sea $E \in S$ tal que $|\nu_1|(E) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $|\nu_1(E)| = 0 < \delta(\varepsilon)$, por lo que $|\nu_2|(E) < \varepsilon$. Por lo tanto $|\nu_2|(E) = 0$.

$\Rightarrow$]

Supongamos que la conclusión es falsa, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión (E_n) de elementos de S tales que $|\nu_1|(E_n) < \frac{1}{2^n}$ pero $|\nu_2|(E_n) \geq \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $E = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n$, entonces por el lema de Borel-Cantelli (ver el ejercicio (32)) se tiene que $|\nu_1|(E) = 0$, asi pues $|\nu_2|(E) = 0$.

Por otro lado, como $|\nu_2|(X) < +\infty$ se sigue de 3.5 b) que

$$|\nu_2|(E) = \lim_{n\downarrow\infty} |\nu_2|(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \varepsilon_0$$

lo cual no es posible.

□

Observación 10.16. En el ejemplo 10.3 2) en el que se definió

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_1(\mu))$$

se tiene que $\nu \ll \mu$ y como ν es una medida con signo finita, el teorema anterior es válido también i.e. dada $\varepsilon > 0$, entonces:

$$\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon$$

siempre que $E \in S$ satisfaga $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$. Este hecho es muy útil y es frecuentemente usado.

3. El teorema de Radon-Nikodým

El ejemplo mencionado 10.3 2) es muy importante, pues se demostrará que bajo condiciones muy generales el recíproco es cierto también, en consecuencia será esencialmente el único método de generar medidas con signo absolutamente continuas con respecto a una medida dada, este es el contenido del teorema de M. J. Radon y O. Nikodým (1930) para el cual necesitamos el siguiente lema:

Lema 10.17. Sean (X, S) un espacio de medida y ν, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas finitas tales que $\nu \ll \mu$, con $\nu \neq 0$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $A \in S$, con $\mu(A) > 0$, tales que A es positivo para la medida con signo $\nu - \varepsilon\mu$.

Demostración. Sea $(A_n \mid B_n)$ una descomposición de Hahn para $\nu - \frac{1}{n}\mu$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sean $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Como $B_0 \subset B_n$, B_0 es negativo para $\nu - \frac{1}{n}\mu$ para todo n, entonces:

$$0 \leq \nu(B_0) \leq \frac{1}{n}\mu(B_0) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ de donde } \nu(B_0) = 0,$$

por lo que $\nu(A_0) > 0$ (pues $\nu \neq 0$) y por continuidad absoluta $\mu(A_0) > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0}) > 0$. Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ y $A = A_{n_0}$. □

Teorema 10.18. (Radon-Nikodým (1930)) Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ-finita y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ-finita tal que $\nu \ll \mu$. Entonces, existe $f \in \mathbb{M}(X, S)$ que satisface

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Si existe $\tilde{f} \in \mathbb{M}(X, S)$ tal que

$$\nu(E) = \int_E \tilde{f} \, d\mu \quad \text{para todo } E \in S \text{ entonces } f = \tilde{f} (\text{c.d. rel. } \mu).$$

Demostración.
Caso 1) μ y ν son medidas finitas.
Sean

$$\mathcal{K} = \{f \in \overline{\mathcal{L}_1^+}(\mu) : \int_E f \, d\mu \leq \nu(E) \quad \text{para todo } E \in S\} \quad \text{y}$$

$$\alpha = \sup\left\{\int f \, d\mu : f \in \mathcal{K}\right\} (\leq \nu(X) < +\infty).$$

Notamos que si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}$ entonces $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{K}$ también, pues si para todo $E \in S$ denotamos por $E_1 = \{x \in E : f_1(x) > f_2(x)\}$ y $E_2 = \{x \in E : f_1(x) \leq f_2(x)\}$ entonces $E = E_1 \cup E_2$ (disjunta) y

$$\int_E \max\{f_1, f_2\} \, d\mu = \int_{E_1} f_1 \, d\mu + \int_{E_2} f_2 \, d\mu \leq \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E)$$

De hecho, si (f_n) denota una sucesión de elementos de $\mathcal{K}$ y $f_0 = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces f_0 pertenece a $\mathcal{K}$, pues si $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$, entonces por el argumento del párrafo anterior e inducción matemática obtenemos que $g_n \in \mathcal{K}$, además como $g_n \uparrow f_0$ se sigue del T.C.M. que para todo $E \in S$:

$$\int_E f_0 \, d\mu = \lim_{n \uparrow \infty} \int_E g_n \, d\mu \leq \nu(E).$$

Lo anterior prueba simultáneamente que $f_0 \in \overline{\mathcal{L}_1^+(\mu)}$ y que $f_0 \in \mathcal{K}$.
Ahora hallamos una sucesión $(f_n) \subset \mathcal{K}$ tal que $\int f_n \, d\mu \to \alpha$, entonces

$$f_0 = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{K} \text{ y satisface } \int f_0 \, d\mu = \alpha.$$

Como $f_0 \in \overline{\mathcal{L}_1^+}$ es posible hallar $f \in \mathbb{M}^+(X, S)$ tal que $f = f_0$ (c.d. rel μ) por lo que también tendremos $f \in \mathcal{K}$ y $\int f \, d\mu = \alpha$. Se probará que $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ para todo $E \in S$ o bien que la medida: $\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu$ es idénticamente cero. Si este no es el caso se sigue del 10.17 que existen $\varepsilon > 0$ y $A \in S$ tales que A es positivo para $\nu_0 - \varepsilon\mu$ y $\mu(A) > 0$, en particular:

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leq \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E \cap A} f \, d\mu.$$

Sea $g = f + \varepsilon\chi_A$ entonces $g \in \mathcal{K}$ pues para todo $E \in S$:

$$\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leq \int_{E-(E\cap A)} f \, d\mu + \nu(E \cap A) \leq \nu(E)$$

para todo $E \in S$, pero $\int g \, d\mu = \alpha + \varepsilon\mu(A) > \alpha$ lo cual contradice la definición de α y acaba la prueba de existencia en este caso.

Si $\tilde{f} \in \mathbb{M}^+(X,S)$ es tal que $\nu(E) = \int_E \tilde{f}\, d\mu$ para todo $E \in S$, entonces

$$\int_E (f - \tilde{f})\, d\mu = 0 \quad \text{para todo } E \in S \text{ por lo que } f = \tilde{f}(\text{c.d. rel } \mu).$$

Caso 2) $\mu(X) < \infty$ y $|\nu|(X) < +\infty$.

Por el teorema 10.14 c), la condición $\nu \ll \mu$ equivale a la simultánea validez de $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$. Por el primer caso existen $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{M}^+(X,S)$ únicas (c.d.rel μ) tales que:

$$\nu^+(E) = \int_E f^{(1)}\, d\mu \text{ y } \nu^-(E) = \int_E f^{(2)}\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S.$$

Es claro que $f = f^{(1)} - f^{(2)}$ satisface las condiciones del teorema y que es única (c.d.rel μ).

Caso 3) $\mu(X) \leq +\infty$ y $|\nu|(X) \leq +\infty$. (Caso general)

Hallamos una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de S disjuntos tal que:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ y } \mu(X_n) < +\infty \quad \text{y} \quad |\nu|(X_n) < +\infty \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por μ_n, ν_n^+ y $\nu_n^- : S_n \cap X_n \to \mathbb{R}$ las restricciones de μ, ν^+ y ν^- determinadas por X_n (i.e. $\mu_n(E) = \mu(E)$ para todo $E \in S \cap X_n$ y analogamente con ν^+ y ν^-). Como $\nu_n^+ \ll \mu_n$ y $\nu_n^- \ll \mu_n$, se tiene que por el caso 2) existen dos sucesiones $(f_n^{(1)})$ y $(f_n^{(2)})$ con $f_n^{(i)} \in \mathbb{M}^+(X_n, S \cap X_n)$ tales que

$$\nu_n^+(E) = \int_E f_n^{(1)}\, d\mu_n \text{ y } \nu_n^-(E) = \int_E f_n^{(2)}\, d\mu_n.$$

Si $E \in S_n \cap X_n$, definimos $f^{(i)} : X \to \mathbb{R}$ poniendo $f^{(i)}(x) = f_n^{(i)}(x)$ si $x \in X_n$ $(i = 1, 2)$; se comprueba fácilmente que $f^{(i)} \in \mathbb{M}^+(X,S)$, además si $E \in S$ es arbitrario obtenemos del T.C.M que:

$$\nu^+(E) = \sum_{n=1} \nu^+(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f_n^{(1)}\, d\mu_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f^{(1)}\, d\mu = \lim_{n\uparrow\infty} \left(\int_{\bigcup_{j=1}^{n} E\cap X_j} f^{(1)}\, d\mu \right)$$

$$= \int_E f^{(1)}\, d\mu$$

y analogamente $\nu^-(E) = \int_E f^{(2)}\, d\mu$ para todo $E \in S$. Ponemos $f = f^{(1)} - f^{(2)}$ y dejamos al lector el comprobar que f satisface las condiciones de unicidad.

□

Existen otras pruebas del teorema anterior. Vea por ejemplo la de J. von Neumann que aparece en [Ro] pp. 242-243. ejercicio (37). o la que aparece en [S-G] pp. 187-189 y que es esencialmente la prueba original de O. Nikodým.

Observaciones 10.19.

1. El teorema anterior permanece válido aún si μ es una medida con signo, ya que si $(A \mid B)$ denota una descomposición de Hahn para μ, podemos aplicar los casos ya probados a las restricciones de ν y μ^+ en A, y a ν y μ^- en B.

2. El teorema anterior permanece válido si ν no es σ-finita (ver [Hal] p.131 ejercicio 7). sin embargo falla si μ no es σ-finita aún si ν es finita, como el siguiente ejemplo, demuestra: X no-numerable. $S = \{E \subset X : E \text{ ó } X - E \text{ es numerable}\}$, μ = conteo y

$$\nu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es numerable,} \\ +\infty & \text{si } E \text{ no es numerable.} \end{cases}$$

Claramente $\nu \ll \mu$ y el teorema 10.18 no se satisface.

Definición 10.20. Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ-finita y $\nu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ-finita tal que $\nu \ll \mu$. La única función (c.d. rel. μ) $f \in \mathbb{M}(X, S)$ que satisface $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ para todo $E \in S$ se llama la **derivada de Radon-Nikodým de ν con respecto a μ** y la denotaremos por $f = \frac{d\nu}{d\mu}[\mu]$ ($[\mu]$ abrevia la expresión (c.d. rel μ))

A continuación enunciamos algunas propiedades de las derivadas de Radon-Nikodým. Por simplicidad nos restringiremos al caso de medidas σ-finitas.

Propiedades 10.21. Sean (X, S) un espacio medible, ν, ν_1, ν_2, ρ y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas σ-finitas entonces:

1. Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces:

$$\nu_1 \pm \nu_2 \ll \mu \text{ y } \frac{d(\nu_1 \pm \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} \pm \frac{d\nu_2}{d\mu}[\mu].$$

2. Si $\rho \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ entonces:

$$\rho \ll \mu \text{ y } \frac{d\rho}{d\mu} = \left(\frac{d\rho}{d\nu}\right)\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)[\mu].$$

3. Si ν y μ son **equivalentes** i.e. $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$ (denotado $\nu \equiv \mu$) entonces:

$$\nu\left(\left\{x \in X : \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)(x) = 0\right\}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}[\mu].$$

Demostración.

1. Es inmediata de la $[\mu]$-unicidad de las derivadas en cuestión. (Para $\nu_1 - \nu_2$ se supone que alguna de las medidas es finita).

2. Sean $f = \frac{d\rho}{d\nu}$ y $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Como ρ, ν, μ son medidas, podemos suponer (ver el caso 1) de 10.18) que $f \geq 0[\nu]$ y $g \geq 0[\mu]$. Sea (s_n) una sucesión de funciones S-simples no-negativas (f_n) tal que $s_n \uparrow f$, entonces por el T.C.M:

$$\int_E f\, d\nu = \lim_{n\uparrow\infty} \int_E s_n\, d\nu \;\text{ y }\; \int_E fg\, d\mu = \lim_{n\uparrow\infty} \int_E s_n g\, d\mu \text{ para todo } E \in S.$$

Por otro lado se sigue inmediatamente de la definición de g que si s es S-simple entonces:

$$\int_E s\, d\rho = \int_E sg\, d\mu.$$

Asi pues: $\rho(E) = \int_E f\, d\nu = \int_E fg\, d\mu$ para todo $E \in S$ y por $[\mu]$-unicidad se tiene que

$$\frac{d\rho}{d\mu} = fg[\mu].$$

3. La primera parte es el contenido del ejercicio (128 i)) y se omite. Por otro lado se sigue del punto anterior con $\rho = \mu$ que

$$1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) \quad [\mu]$$

por lo que: $\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}[\mu]$. Observe finalmente que $\nu \equiv \mu \Leftrightarrow [\mu] = [\nu]$. (i.e. μ y ν definen los mismos nulos).

□

Teorema 10.22. [10](Descomposición de Lebesgue (1904)) Sean (X, S) un espacio medible. $\nu, \mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ dos medidas σ-finitas, entonces existen dos únicas medidas σ-finitas $\nu_0, \nu_1 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que:

i) $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

ii) $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$.

Demostración.

Caso 1) μ y ν medidas finitas.

Como $\nu \leq \mu + \nu$, entonces $\nu \ll \mu + \nu$. Si $f = \frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$ $[\mu + \nu]$ entonces

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu + \int_E f\, d\nu \quad \text{para todo } E \in S$$

de donde $0 \leq f \leq 1[\mu + \nu]$ y en particular, $0 \leq f \leq 1[\nu]$. Sea $C = \{x \in X : f(x) = 1\}$ y $D = \{x \in X : 0 \leq f(x) < 1\}$. Definimos $\nu_0, \nu_1 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ como las contracciones de ν a C y a D respectivamente, i.e: $\nu_0(E) = \nu(E \cap C)$ y $\nu_1(E) = \nu(E \cap D)$ para todo $E \in S$.

Como $\nu(X - (C \cup D)) = 0$ se tiene que $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

[10]La descomposición $\nu = \nu_0 + \nu_1$ se llama la descomposición de **Lebesgue de** ν **con respecto a** μ.

Supongamos que $\mu(E) = 0$, entonces $\mu(E \cap D) = 0$ también y por la definición de f:

$$\nu_1(E) = \nu(E \cap D) = \int_{E \cap D} f \, d\nu. \tag{10.1}$$

Por otro lado $f < 1$ $[\nu]$ en $E \cap D$ de donde se sigue (ejercicio) que:

$$\int_{E \cap D} f \, d\nu < \nu(E \cap D) \quad \text{si } \nu(E \cap D) > 0$$

lo cual contradice (10.1): así, $\nu_1(E) = \nu(E \cap D) = 0$ por lo tanto $\nu_1 \ll \mu$.

Para demostrar que $\nu_0 \perp \mu$, será suficiente comprobar que $\mu(C) = 0$.

Como $\nu(C) = \int_C f \, d\mu + \int_C f \, d\nu = \mu(C) + \nu(C)$ y $\nu(C) < +\infty$, entonces $\mu(C) = 0$.

Si $\nu_0', \nu_1' : S \to \mathbb{R}$ son medidas tales que $\nu = \nu_0' + \nu_1$ y $\nu_0' \perp \mu$, $\nu_1' \ll \mu$ entonces:

$$\nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1$$

es una medida con signo que es simultaneamente absolutamente continua y singular con respecto a μ y se sigue de 10.14 e) que es idénticamente cero por lo tanto $\nu_0 = \nu_0'$ y $\nu_1 = \nu_1'$.

Caso 2) $\mu(X) \leq \infty$ y $\nu(X) \leq \infty$

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión disjunta de elementos de S tales que

$$\mu(X_n) < +\infty, \nu(X_n) < +\infty \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sean μ_n y $\nu_n : S \cap X_n \to \mathbb{R}$ las restricciones de μ y ν sobre X_n. Por el caso 1) para todo $n \in \mathbb{N}$ fija, existen medidas $\nu_{n,o}$ y $\nu_{n,1}$ tales que:

$$\nu_n = \nu_{n,o} + \nu_{n,1} \quad \text{y} \quad \nu_{n,0} \perp \mu_n, \nu_{n,1} \ll \mu_n.$$

Definimos $\nu_0, \nu_1 : S \to \overline{\mathbb{R}}$ poniendo $\nu_j(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{n,j}(E \cap X_n) \quad j = 0, 1$; se comprueba que ν_0 y ν_1 son medidas tales que $\nu = \nu_0 + \nu_1, \nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$. Supongamos que $\nu = \nu_0' + \nu_1'$ con ν_0', ν_1' medidas tales que $\nu_0' \perp \mu$ y $\nu_1' \ll \mu$, entonces las restricciones $\nu_{0,n}', \nu_{1,n}' : S \cap X_n \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfacen

$$\nu_{0,n}' \perp \mu_n, \nu_{1,n}' \ll \mu_n \text{ y } \nu_n = \nu_{n,o}' + \nu_{n,1}'.$$

por la unicidad probada en el caso 1) obtenemos que

$$\nu_{n,0}' = \nu_{0,n}' \text{ y } \nu_{n,1}' = \nu_{1,n}' \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{por lo tanto, } \nu_0 = \nu_0' \text{ y } \nu_1 = \nu_1'.$$

□

Para mayor información sobre la descomposición de Lebesgue de medidas en $\mathbb{B}_{[a,b]}$ con respecto a la medida de Lebesgue, vea [S-G] capítulo 9, especialmente el Teorema 10, sección 9.6 pp.202-203.

Teorema 10.23. (Vitali-Hahn-Saks (1933)) Sean (X, S, μ) un espacio de medida y (ν_n) una sucesión de medidas **finitas** en (X, S) tal que $\nu_n \ll \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$ existe para todo $E \in S$, entonces:

para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}}\{\nu_n(B)\} < \varepsilon \quad \text{para todo } B \in S, \text{ con } \mu(B) < \delta.$$

Demostración. Definimos $d : S \times S \to [0, \frac{\pi}{2}]$ poniendo $d(A, B) = \tan^{-1} \mu(A \triangle B)$ en donde hemos convenido en definir $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$. (Compare con la seudo-métrica definida en el ejercicio (34)). Entonces d es una seudo-métrica y al igual que en el ejercicio (34) da lugar a una métrica **completa** sobre el espacio cociente $\tilde{S} = S/\mathcal{N}(\mu)$. Por simplicidad en la notación **no** distinguiremos entre $E \in S$ y su clase de equivalencia.

Sean $\varepsilon > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$ dadas, fijamos $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ y definimos:

$$\tilde{S}_{n,m} = \{E \in S : |\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \varepsilon'/3\}$$

entonces $\tilde{S}_{n,m}$ es d-cerrado, pues si (E_k) es una sucesión convergente en $\tilde{S}_{n,m}$ con $d(E_k, E) \to 0$, entonces $\mu(E_k \triangle E) \to 0$ y dado que $\nu_n - \nu_m \ll \mu$, se tiene

$$|(\nu_n - \nu_m)(E_k \triangle E)| \to 0,$$

por lo que también

$$|\nu_n(E_k) - \nu_m(E_k)| \to |\nu_n(E) - \nu_m(E)|$$

$$\text{por tanto } E \in \tilde{S}_{n,m} \text{ y } \tilde{S}_{n,m} \text{ es cerrado.}$$

Sea $\tilde{S}_p = \bigcap_{m,n\geq p} \tilde{S}_{n,m}$, con $p \in \mathbb{N}$, como $(\nu_n(E))$ converge para todo $E \in \tilde{S}$ se tiene que $\tilde{S} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \tilde{S}_p$, así que por el teorema de **Categoría de Baire** (Ver [H-S] p. 68) algún $\tilde{S}_q$ tiene d-interior no-vacío.

Sea A un punto interior de $\tilde{S}_q$ y $r > 0$ tal que

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \frac{\varepsilon'}{3} \quad \text{para todo } m, n \geq q$$

y para todo $E \in \tilde{S}$ con $d(A, E) < r$. Por 10.15 es posible elegir $\delta \in (0, r)$ tal que

$$|\nu_n(B)| < \frac{\varepsilon'}{3} \quad \text{para todo } n = 1, \ldots, q \quad \text{para todo } B \in S$$

tal que $\mu(B) < \delta$ y además $d(A \cup B, A) < r$, $d(A - B, A) < r$ entonces a partir de la identidad:

$$\nu_n(B) = \nu_q(B) + \{\nu_n(B) - \nu_q(B)\}$$

$$= \nu_q(B) + \{\nu_n(A \cup B) - \nu_q(A \cup B)\} - \{\nu_n(A - B) - \nu_q(A - B)\}$$

obtenemos finalmente que $|\nu_n(B)| < \varepsilon'$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\nu_n(B)| < \varepsilon$.

□

Corolario 10.24. Si a las hipótesis del teorema anterior se agrega $\mu(X) < +\infty$, entonces la función $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$ es una medida absolutamente continua con respecto a μ.

Demostración. Basta demostrar que ν es σ-aditiva. Es evidente que ν es no-negativa y aditiva, así pues por el ejercicio (38) será suficiente probar que

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\downarrow\infty} \nu(E_k)$$

para toda sucesión decreciente (E_k).

Sea $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces como μ es finita $\mu(E_m - E) \downarrow 0 \quad (m \to \infty)$.

Por el teorema anterior, dada $\varepsilon > 0$ se tiene que: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\nu_n(E_m - E)\} < \varepsilon$ si m es suficientemente grande, de donde obtenemos:

$$|\nu(E_m) - \nu(E)| = \nu(E_m - E) \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que ν es una medida. La afirmación $\nu \ll \mu$ se prueba de manera similar y se omite.

□

Observaciones 10.25. Un caso particular importante de 10.23 es el resultado contenido en el ejercicio (119 ii)).

CAPÍTULO 11

La medida producto

1. Introducción

En este capítulo se construye el producto cartesiano de dos espacios medibles. Se relaciona la medibilidad de funciones en dos variables con la medibilidad de cada una de sus secciones. Se obtiene a la medida del producto usando como herramienta fundamental el lema de las clases monótonas (1.12) y se obtiene el principio de Cavalieri. Se prueban los teoremas de Tonelli y de Fubini que relacionan la integral doble de una función con las integrales iteradas.

Definición 11.1. Sean (X, S) y (Y, T) dos espacios medibles. Un subconjunto $R \subset X \times Y$ se llama un **rectángulo medible** si es de la forma $R = A \times B$ con $A \in S$ y $B \in T$. Nos referiremos a A y B como los **lados** de R.

Denotaremos por $S \times T = \{A \times B : A \in S \text{ y } B \in T\}$ a la familia de los rectángulos medibles.

Definición 11.2. Sean (X, S) y (Y, T) dos espacios medibles. Definimos el **espacio medible producto** denotado $(X \times Y, S \otimes T)$ en donde $S \otimes T$ es la σ-álgebra de subconjuntos de $X \times Y$ generada por $S \times T$ i.e. $S \otimes T = S(S \times T)$

A continuación identificamos el álgebra generada por $S \times T$. Note que la prueba exhibirá la misma descripción si S y T son sólo álgebras.

Teorema 11.3. [11] $\mathcal{A}(S \times T) = \{$uniones finitas disjuntas de elementos de $S \times T\}$.

[11] Como toda unión finita y disjunta de rectángulos medibles es evidentemente la unión finita de rectángulos medibles e inversamente toda unión finita de rectángulos medibles puede reescribirse como unión finita y disjunta de rectángulos medibles (ver [Ba] ejercicios 10 c) y 10 d)). entonces $\mathcal{A}(S \times T)$ es también la clase de uniones finitas de rectángulos medibles.

Demostración. Sea $\mathcal{A}_1$ = {uniones finitas disjuntas de elementos de $S \times T$}.

Es claro que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(S \times T)$ y que $S \times T \subset \mathcal{A}_1$, por lo que será suficiente comprobar que $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de subconjuntos de $X \times Y$, lo cual se hará en varios pasos.

1. Claramente $\emptyset$ y $X \times Y \in \mathcal{A}_1$

2. $\mathcal{A}_1$ es cerrado bajo intersecciones.

   Sean $D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ y $D' = \bigcup_{j=1}^{m} A'_j \times B'_j$ en $\mathcal{A}_1$, entonces:

$$D \cap D' = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} A'_j \times B'_j\right) = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_i) \cap (A'_j \times B'_j)$$

$$= \bigcup_{i,j} (A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j).$$

   que es la unión finita **disjunta** de rectángulos medibles.

3. $\mathcal{A}_1$ es cerrada bajo diferencias.

   Sean D y D' como en 2), entonces

$$D - D' = \left(\bigcup_{i} A_i \times B_i\right) \cap \left((X \times Y) - \bigcup_{j} A'_j \times B'_j\right)$$

$$= \left(\bigcup_{i} A_i \times B_i\right) \cap \left(\bigcap_{j} (X \times Y) - A'_j \times B'_j\right)$$

$$= \bigcup_{i} (A_i \times B_i) \cap \left(\bigcap_{j} (X \times Y) - A'_j \times B'_j\right)$$

$$= \bigcup_{i} \left(\bigcap_{j} (A_i \times B_i) \cap ((X \times Y) - A'_j \times B'_j)\right)$$

$$= \bigcup_{i} \bigcap_{j} (A_i \times B_i) - (A'_j \times B'_j)$$

Ahora bien, $A_i \times B_i - A'_j \times B'_j$ es la unión disjunta de los rectángulos medibles

$$(A_i - A'_j) \times B_i \text{ y } (A_i \cap A'_j) \times (B_i - B_j).$$

Por (2) $\mathcal{A}_1$ es cerrada bajo intersecciones finitas, por lo que

$$\bigcap_{j} (A_i \times B_i) - (A'_j \times B'_j) \in \mathcal{A},$$

y como $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n$ son ajenos, también lo son sus subconjuntos

$$\bigcap_{j} (A_1 \times B_1) - (A'_j \times B'_j), \ldots, \bigcap_{j} (A_n \times B_n) - (A'_j \times B'_j).$$

Esto prueba que $D - D' \in \mathcal{A}_1$ lo que establece que $\mathcal{A}_1$ es un álgebra.

□

Teorema 11.4. Sean (X, S) y (Y, T) dos espacios medibles. Sean $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathbb{E}' \subset \mathcal{P}(Y)$ sub-familias no vacías que satisfacen $S(\mathbb{E}) = S$, $S(\mathbb{E}') = T$ y $X \in \mathbb{E}$, $Y \in \mathbb{E}'$, entonces:

$$S \otimes T = S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}').$$

Demostración. Claramente $S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}') \subset S(S \times T) = S \otimes T$, por lo que será suficiente probar que $S \times T \subset S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')$.

Para $A \in \mathbb{E}$ arbitraria, definimos $\mathcal{L}_A = \{B \subset Y : A \times B \in S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')\}$, claramente $\mathbb{E}' \subset \mathcal{L}_A$. Probaremos que $\mathcal{L}_A$ es un λ-sistema (ver 1.10).

i) $Y \in \mathcal{L}_A$, pues $Y \in \mathbb{E}'$.

ii) Si $B_1 \subset B_2 \in \mathcal{L}_A$, como $A \times (B_2 - B_1) = A \times B_2 - A \times B_1$ se tiene que $B_2 - B_1 \in \mathcal{L}_A$

iii) Si (B_i) es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}_A$ entonces:

$$A \times \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \times B_i) \in S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')$$

asi pues $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{L}_A$.

Por otro lado $\mathcal{L}_A$ contiene a $\pi(\mathbb{E}') = \{$intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{E}'\}$ ya que si $F \in \pi(\mathbb{E}')$, entonces

$$F = B_1 \cap \ldots \cap B_n$$

con $B_i \in \mathbb{E}'$ $\quad (i = 1, \ldots, n)$ y $A \times F = \bigcap_{i=1}^{n} A \times B_i \in S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')$.

Se sigue del L.C.M. que $T = S(\mathbb{E}')$ esta contenida en $\mathcal{L}_A$ para todo $A \in \mathbb{E}$. Ahora fijamos $B \in T$ y definimos

$$\mathcal{L}_B = \{A \subset X : A \times B \in S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')\}$$

y analogamente comprobamos que $\mathcal{L}_B$ es un λ-sistema que contiene a $\pi(\mathbb{E})$ por lo que debe contener a $S = S(\mathbb{E})$.

Lo anterior muestra que $S \times T \subset S(\mathbb{E} \times \mathbb{E}')$ y acaba la prueba del teorema.

□

Con ayuda del teorema anterior es fácil establecer el ejercicio (133).

Definición 11.5. Sea $F \subset X \times Y$ un subconjunto. Para $x \in X$ fijo definimos la x-**sección de** F denotada por F_x como el subconjunto de Y definido por:

$$F_x = \{y \in Y : (x, y) \in F\}.$$

Analogamente para $y \in Y$, definimos la y-**sección de** F denotado F^y como el subconjunto de X definido por:

$$F^y = \{x \in X : (x, y) \in F\}.$$

Es evidente que si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces:

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

y

$$(A \times B)^y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{si } y \notin B. \end{cases}$$

Las siguientes son algunas propiedades de las secciones.

Teorema 11.6. Sean F, H y F_n $\quad (n \in \mathbb{N})$ subconjuntos de $X \times Y$ y $x \in X$, entonces

i) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n)_x$.

ii) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)_x$.

iii) $(F - H)_x = F_x - H_x$, en particular: $(X \times Y - H)_x = Y - H_x$.

iv) $(F \triangle H)_x = F_x \triangle H_x$.

v) Si $F \subset H$, entonces $F_x \subset H_x$.

Análogamente con las y-secciones.

Demostración. Cada una de las identidades es consecuencia inmediata de la definición y se invita a que el lector las compruebe de ese modo.

Un método más rápido es considerar para $x \in X$ fija, la función $i_x : Y \to X \times Y$ dada por: $i_x(y) = (x, y)$ y observar que $i_x^{-1}(F) = F_x$ por lo que las identidades son inmediatas del hecho de que la imagen inversa conserva las operaciones usuales de conjuntos.

□

Teorema 11.7. Sea $F \in S \otimes T$, entonces $F_x \in T$ y $F^y \in S$ para todo $x \in X$, para todo $y \in Y$.

Demostración. Sea $x \in X$ fijo e $i_x : Y \to X \times Y$ dada por $i_x(y) = (x, y)$. entonces por el ejemplo 1.3.5:

$$\{F \subset X \times Y : F_x = i_x^{-1}(F) \in T\},$$

es una σ-álgebra, que evidentemente contiene a $S \times T$ y en consecuencia contiene a $S \otimes T$. Asi pues, $F_x \in T$ para todo $x \in X$. La prueba con las y-secciones es totalmente análoga considerando a la función $i^y : X \to X \times Y$ dada por $i^y(x) = (x, y)$.

□

Ejemplo 11.8. El recíproco del teorema anterior es falso.

Sea $X = Y$ no-numerable, $S = T = \{A \subset X : A$ ó $X - A$ es finito o numerable.$\}$ y $D = \{(x,x) : x \in X\}$ la diagonal en $X \times X$, entonces para todo $x \in X$ $D_x = \{x\} = D^x \in S$, pero por el ejercicio (134 ii)), $D \notin S \otimes S$.

Ahora consideramos las secciones de funciones.

Definición 11.9. Sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función dada. Definimos la **x-sección de** f, con $x \in X$ fija, como la función $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f_x(y) = f(x,y)$. De manera análoga se define la **y-sección de** f, con $y \in Y$ fija, como la función $f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f^y(x) = f(x,y)$.

Es claro que si $F \subset X \times Y$ entonces $(\chi_F)_x = \chi_{F_x}$ y $(\chi_F)^y = \chi_{F^y}$.

El resultado correspondiente a 11.7 para funciones $S \otimes T$-medibles es cierto también.

Teorema 11.10. Sea $f \in \widetilde{\mathbb{M}}(X \times Y, S \otimes T)$, entonces

$$f_x \in \widetilde{\mathbb{M}}(Y,T) \quad \text{para todo } x \in X \text{ y } f^y \in \widetilde{\mathbb{M}}(X,S) \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Demostración. Sea $x \in X$ fija, es claro que $f_x = f \circ i_x$, entonces

$$\text{para todo } B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$$

$$f_x^{-1}(B) = i_x^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) = (f^{-1}(B))_x$$

el cual pertenece a T por 11.7. La prueba para y-secciones es análoga.

□

Observación 11.11. El recíproco del teorema anterior es falso. Basta examinar el ejemplo 11.8 y tomar $f = \chi_D$.

2. Secciones de conjuntos y las integrales de sus medidas

El siguiente resultado es la parte esencial de nuestra construcción de la medida producto y pone en evidencia el papel central que juegan las secciones y sus medidas.

Teorema 11.12. Sean (X,S,μ) y (Y,T,ν) espacios de medida σ-finita y $F \in S \otimes T$ dados. Si $f_F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g^F : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ se definen por $f_F(x) = \nu(F_x)$ y $g^F(y) = \mu(F^y)$, entonces

$$f_F \in \overline{\mathbb{M}^+}(X,S), \quad g^F \in \overline{\mathbb{M}^+}(Y,T) \text{ y } \int f_F \, d\mu = \int g^F \, d\nu.$$

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \{F \in S \otimes T :$ el teorema es cierto para $F\}$.

Si $A \times B \in S \times T$ entonces

$$f_{A\times B}(x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{si } x \in A. \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

i.e. $f_{A\times B} = \nu(B)\chi_A$ y análogamente $g^{A\times B} = \mu(A)\chi_B$ de donde es clara la medibilidad en sus respectivos espacios asi como la no-negatividad y

$$\int f_{A\times B} \, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int g^{A\times B} \, d\nu.$$

Asi pues $S \times T \subset \mathcal{L}$ y como $S \times T$ es un π-sistema tal que $S(S \times T) = S \otimes T$ será suficiente probar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema, lo que haremos en el siguiente caso.

Caso 1) $\mu(X) < \infty$ y $\nu(Y) < \infty$.

i) Como $S \times T \subset \mathcal{L}$ entonces $X \times Y \in \mathcal{L}$.

ii) Sean $F, H \in \mathcal{L}$ tal que $F \subset H$, entonces como ν es finita tenemos:

$$f_{H-F}(x) = \nu\left((H - F)_x\right) = \nu(H_x - F_x) = \nu(H_x) - \nu(F_x) = f_H(x) - f_F(x)$$

i.e. $f_{H-F} = f_H - f_F$ y analogamente $g^{H-F} = g^H - g^F$. Como $F, H \in \mathcal{L}$ obtenemos $f_F, f_H \in \mathbb{M}^+(X,S)$ y $g^F, g^H \in \mathbb{M}^+(Y,T)$ por lo que $f_{H-F} \in \mathbb{M}^+(X,S)$ y $g^{H-F}\mathbb{M}^+(Y,T)$. Como X y Y tienen medida finita, todas las funciones en cuestión son integrables por lo que:

$$\int f_{H-F} \, d\mu = \int f_H \, d\mu - \int f_F \, d\mu = \int g^H \, d\nu - \int g^F \, d\nu = \int g^{H-F} \, d\nu.$$

Esto prueba que $H - F \in \mathcal{L}$.

iii) Sea $(F_n) \subset \mathcal{L}$ una sucesión creciente de subconjuntos con unión igual a F, entonces

$$f_F = \lim_{n\uparrow\infty} f_{F_n} \quad \text{y} \quad g^F = \lim_{n\uparrow\infty} g^{F_n},$$

por lo que f_F y g^F son medibles no-negativas y por el T.C.M:

$$\int f_F \, d\mu = \int g^F \, d\nu$$

lo que prueba que $F \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, en este caso $\mathcal{L} = S \otimes T$.

Para el caso general, procedemos de la siguiente manera

Caso 2) $\mu(X) \leq +\infty$ y $\nu(Y) \leq +\infty$.

Sean (X_i) y (Y_j) dos sucesiones ajenas en S y T respectivamente tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j \text{ y } \mu(X_i) < +\infty, \ \nu(Y_j) < +\infty \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}.$$

Para $F \in S \otimes T$ denotamos $F_{i,j} = F \cap (X_i \times Y_j)$. Por 1.9 se tiene que

$$S \otimes T \cap (X_i \times Y_j) = S((S \times T) \cap (X_i \times Y_j))$$

y que a su vez es igual a

$$S(S \cap X_i \times T \cap Y_j) = (S \cap X_i) \otimes (T \cap Y_j).$$

Además denotamos por $\mu_i : S \cap X_i \to \mathbb{R}$ y $\nu_j : T \cap Y_j \to \mathbb{R}$ las restricciones de μ y ν a X_i y Y_j respectivamente.

Como μ_i y ν_j son finitas, se sigue del caso 1) que $F_{ij} \in (S \cap X_i) \otimes (T \cap Y_j)$ satisfacen las condiciones del teorema i.e. $f_{F_{i,j}}$, $g^{F_{i,j}}$ son no-negativas y medibles en sus respectivos espacios y

$$\int f_{F_{i,j}} \, d\mu_i = \int g^{F_{i,j}} \, d\nu_j \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}.$$

Como $F_{i,j} = F \cap (X_i \times Y_j)$, con $F \in S \otimes T$, entonces $(F_{ij})_x = F_x \cap Y_j$ si $x \in X_i$ ó $(F_{ij})_x = \emptyset$ si $x \notin X_i$, de donde $f_{F_{i,j}}(x) = \chi_{X_i}(x)\nu(F_x \cap Y_j)$ y análogamente

$$g^{F_{i,j}}(y) = \chi_{Y_j}(y)\mu(F^y \cap X_i).$$

Por lo que $f_F = \sum_{i,j} f_{F_{i,j}}$ y $g^F = \sum_{i,j} g^{F_{i,j}}$, lo anterior prueba que f_F y g^F son no-negativas y medibles en sus respectivos espacios, además

$$\begin{aligned}\int f_F \, d\mu &= \sum_{i,j} \int_{X_i} f_{F_{i,j}} \, d\mu = \sum_{i,j} \int f_{F_{i,j}} \, d\mu_i \\ &= \sum_{i,j} \int g^{F_{i,j}} \, d\nu_j = \sum_{i,j} \int_{Y_j} g^{F_{i,j}} \, d\nu \\ &= \int g^F \, d\nu.\end{aligned}$$

Esto establece el teorema. (Ver el ejercicio 139)).

□

La conclusión del teorema anterior no se cumple si alguno de los espacios de medida no es σ-finito como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.13. Sean $X = Y = [0,1]$, $S = T = \mathbb{B}_{[0,1]}$. Por el ejercicio (134 i)) la diagonal D pertenece a $S \otimes T$. Sea μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{B}_{[0,1]}$ y ν la medida de conteo, entonces $\int \nu(D_x) \, d\mu = 1$ pero $\int \mu(D^y) \, d\nu = 0$.

3. La medida producto $\mu \otimes \nu$

Teorema 11.14. [12](De la medida producto) Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finita, entonces la función conjuntista $\pi \colon S \otimes T \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\pi(F) = \int \nu(F_x) \, d\mu = \int \mu(F^y) \, d\nu$$

es una medida σ-finita y es la **única** medida sobre $S \otimes T$ con la propiedad de que:

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{para todo } A \times B \in S \times T.$$

Demostración. Claramente $\pi(\emptyset) = 0$ y $\pi(F) \geq 0$. Si (F_n) es una sucesión disjunta de elementos en $S \otimes T$, entonces por 4.16:

$$\pi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \int \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)_x\right) d\mu = \int \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n)_x\right) d\mu$$

[12]Llamaremos a π la **medida producto** de μ y ν y la denotaremos por $\pi = \mu \otimes \nu$.

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} (\nu(F_n)_x)\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu((F_n)_x)\ d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(F_n)$$

lo que prueba que π es una medida.

Por otro lado si $F = A \times B \in S \times T$ entonces

$$\nu(F_x) = \chi_A(x)\nu(B) \quad \text{y} \quad \pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Como X y Y pueden ser escritos como la unión numerable de medibles con medida finita, $X \times Y$ se escribe como la unión numerable de rectángulos medibles de π-medida finita, por lo tanto π es σ-finita.

Considerando $\pi|_{\mathcal{A}(S\times T)} : \mathcal{A}(S \times T) \to \overline{\mathbb{R}}$ obtenemos una casi medida σ-finita y por el teorema de unicidad de Hahn 7.12 existe una única extensión sobre $S \otimes T$ que es precisamente π.

□

De hecho, el teorema de Hahn garantiza una única extensión sobre una σ-álgebra π-completa que contiene a $S \otimes T$ y que denotaremos por $\overline{S \otimes T}$ y que en general contiene propiamente a $S \otimes T$,aún si S y T son completas como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.15. Sean $X = Y = [0,1]$, $S = T = \mathbb{B}_{[0,1]}$, $\mu = \nu =$ medida de Lebesgue sobre $\mathbb{B}_{[0,1]}$ y $V \subset [0,1]$ un subconjunto no-medible, entonces $F = \{0\} \times V \notin S \otimes T$ (pues $F_0 \notin T$) pero si pertenece a $\overline{S \otimes T}$, pues $F \subset \{0\} \times Y$ y $\pi(\{0\} \times Y) = 0$. Puede probarse sin embargo que en general: $\overline{S \otimes T} = \overline{\overline{S} \otimes \overline{T}}$.

Observaciones 11.16. Otra descripción de π esta dada por:

$$\pi(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, A_i \times B_i \in S \times T\right\}$$

para todo $F \in S \otimes T$.

Esto se sigue de 11.14, 11.3 y 7.11.

Lo anterior sugiere otro enfoque para la construcción de la medida producto considerando a la medida exterior generada por la casi-medida $\mu \times \nu$

definida de manera natural sobre $\mathcal{A}(S \times T)$ (ver 11.3) y aplicando el teorema de extensión 7.11. De este modo se obtiene una medida completa definida sobre la σ-álgebra de los $(\mu \times \nu)^*$-medibles y que contiene a $S \otimes T$. Ahora bien, si $\mathcal{A} \subset S$ y $\mathcal{A}' \subset T$ son subálgebras con la propiedad de que $S(\mathcal{A}) = S$ y $S(\mathcal{A}') = T$, entonces $S(\mathcal{A} \times \mathcal{A}') = S \otimes T$ por 11.4 y si denotamos $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$ entonces $\mathcal{A}_1$ consiste de la unión finita disjunta de elementos de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ (11.3) y $S(\mathcal{A}_1) = S \otimes T$ también, por lo que:

$$\pi(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'\right\}$$

para todo $F \in S \otimes T$.

Se sugiere al lector que trate de seguir este método alternativo para la construcción de la medida producto si $X = Y = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ es el álgebra del ejercicio (7).

Usando cubiertas medibles (ver el ejercicio (86)) es inclusive posible probar que $(\mu \times \nu)^*$ coincide con $\mu^* \times \nu^*$ sobre $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$. (Vea [Hal] p.150, ejercicio 9)

A continuación enunciamos dos consecuencias fáciles del teorema 11.14, bajo las mismas hipótesis de éste.

Teorema 11.17.

a) Sean $E, F \in S \otimes T$ tales que $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ c.d. rel μ (o $\mu(E^y) = \mu(F^y)$ c.d. rel ν) entonces $\pi(E) = \pi(F)$. (Principio de B. Cavalieri (1635)).

b) Las siguientes condiciones son equivalentes para $F \in S \otimes T$:

   i) $\pi(F) = 0$.

   ii) $\nu(F_x) = 0$ c.d. rel μ.

   iii) $\mu(F^y) = 0$ c.d. rel ν.

Demostración. Se omite.

□

4. El teorema de Tonelli y el teorema de Fubini

Llegamos al primer resultado que relaciona las integrales de funciones en $\overline{\mathbb{M}^+}(X \times Y, S \otimes T)$ en términos de las integrales iteradas de sus secciones. Nótese que es válido sin restricciones excepto por la hipótesis de no-negatividad y se debe a L. Tonelli (1885-1946).

Teorema 11.18. Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finita, $h \in \overline{\mathbb{M}^+}(X \times Y, S \otimes T)$ y $A \times B \in S \times T$ dados, entonces las funciones $f(x) = \int_B h_x \, d\nu$ y $g(y) = \int_A h^y \, d\mu$ son medibles en sus respectivos espacios y:

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_A \left(\int_B h_x \, d\nu \right) d\mu = \int_B \left(\int_A h^y \, d\mu \right) d\nu$$

en donde cada término puede ser $+\infty$.

Demostración. Si $h = \chi_F$ con $F \in S \otimes T$, entonces

$$\int_B h_x \, d\nu = \int_B (\chi_F)_x \, d\nu = \int_B \chi_{F_x} \, d\nu$$

$$= \nu(B \cap F^y) = \nu\left(((X \times B) \cap F)_x\right) \quad \text{y por 11.12 } f \text{ es S-medible}$$

y análogamente $\int_A h^y \, d\mu = \mu(A \cap F^y) = \mu\left(((A \times Y) \cap F)^y\right)$ y por 11.12 g es T-medible. Aplicando 11.14 obtenemos:

$$\int_A \left(\int_B h_x \, d\nu \right) d\mu = \int_A \nu\left((X \times B) \cap F\right)_x \, d\mu$$

$$= \int \nu\left(((A \times B) \cap F)_x\right) d\mu = \mu \otimes \nu\left((A \times B) \cap F\right)$$

y análogamente

$$\int_B \left(\int_A h^y \, d\mu \right) d\nu = \mu \otimes \nu\left((A \times B) \cap F\right)$$

que es igual a

$$\int_{A\times B} \chi_F \, d(\mu \otimes \nu).$$

Por linealidad el teorema es válido para funciones $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ que $S \otimes T$-simples.

Sea $h \in \overline{\mathbb{M}^+}((X \times Y), S \otimes T)$, por 2.6 existe una sucesión no-decreciente de funciones $S \otimes T$-simples (h_n) tal que $h_n \uparrow h$ y por el T.C.M. tenemos que

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \lim_{n\uparrow\infty} \int_{A\times B} h_n \, d(\mu \otimes \nu).$$

Sean $f_n(x) = \int_B (h_n)_x \, d\nu$ y $g_n(y) = \int_A (h_n)^y \, d\mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f_n y g_n son funciones no-negativas, medibles en sus respectivos espacios y (f_n), (g_n) son sucesiones no-decrecientes y por dos aplicaciones del T.C.M. convergen a las funciones medibles no-negativas

$$f(x) = \int_B h_x \, d\nu \quad \text{y} \quad g(y) = \int_A h^y \, d\mu \ \text{ respectivamente.}$$

Dos nuevas aplicaciones del T.C.M. y la validez del teorema para cada h_n implica que:

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \lim_{n\uparrow\infty} \int_{A\times B} h_n \, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \int_A \left(\int_B (h_n)_x \, d\nu \right) d\mu$$

$$= \int_A \left(\int_B (h)_x \, d\nu \right) d\mu,$$

y análogamente

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_B \left(\int_A (h)^y \, d\mu \right) d\nu.$$

□

Una aplicación interesante del teorema de Tonelli esta en el ejercicio (141).

Ahora eliminamos la hipótesis de la no-negatividad de la función h, pero a costa de imponer la integrabilidad de h, para obtener el llamado teorema de G. Fubini (1879-1943) cuyo nombre se asocia a todo resultado en donde se efectúen integraciones iteradas.

Teorema 11.19. (G. Fubini (1907)) Sean (X, S, μ), (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitas, $h \in \mathcal{L}_1(X \times Y, S \otimes T, \mu \otimes \nu)$ y $A \times B \in S \times T$ dadas, entonces:

i) $h_x \in \mathcal{L}_1(\nu)$ c.d. y $h^y \in \mathcal{L}_1(\mu)$ c.d.

ii) Si definimos $f(x) = \int_B h_x \, d\nu$ c.d. y $g(y) = \int_A h^y \, d\nu$ c.d. entonces $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}_1(\nu)$.

iii) $\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_A f \, d\mu = \int_B g \, d\nu$.

Demostración. Como $h \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$, entonces $h^+, h^- \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$. Aplicando el teorema anterior a h^+ y como $(h^+)_x = (h_x)^+$, $(h^+)_y = (h_y)^+$ se tiene:

$$\int_A f^+ \, d\mu = \int_B g^+ \, d\nu = \int_{A\times B} h^+ \, d(\mu \otimes \nu) < +\infty,$$

pues $h \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ por lo que f^+, g^+ son integrables también en sus respectivos espacios y son en consecuencia finitas c.d. rel μ y rel ν (respectivamente, ejercicio (43)), esto implica que $(h_x)^+ \in \mathcal{L}_1(\nu)$ (c.d. rel ν) y $(h^y)^+ \in \mathcal{L}_1(\mu)$ (c.d. rel μ). Como el argumento idéntico para h^- es válido también, obtenemos que f y g son integrables en sus respectivos espacios, así como h_x y h^y lo son c.d. Finalmente

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_{A\times B} h^+ \, d(\mu \otimes \nu) - \int_{A\times B} h^- \, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

y análogamente:

$$\int_{A\times B} h \, d(\mu \otimes \nu) = \int_B g \, d\nu.$$

□

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 11.20. El teorema de Tonelli deja de ser válido si algún factor no es σ-finito, para esto basta considerar $h = \chi_D$ en el ejemplo 11.13. Sin embargo si uno de los factores es $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{conteo})$ entonces el resultado es cierto. (ver el ejercicio (138))

Ejemplo 11.21. Sean $X = Y = (0,1)$, $S = T = \mathbb{B}_{(0,1)}$ y $\mu = \nu =$ la medida de Lebesgue en $(0,1)$. Sea $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ dada por: $h(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Como h es continua, h es $S \otimes T$-medible. Sea $x \in (0,1)$ fijo entonces:

$$f(x) = \int_Y h_x \, d\nu = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{x^2+1}$$

entonces

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = (\arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Pero como $h(x,y) = -h(y,x)$ obtenemos que $\int_Y g \, d\nu = -\frac{\pi}{4}$.

Los valores resultan ser diferentes ya que $h \notin \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$, hecho que comprobamos a continuación i.e. debemos verificar que $\int_{X\times Y} |h| \, d(\mu \times \nu) = +\infty$ o bien como el integrando es medible no-negativo basta demostrar por 11.18, que:

$$\int_X \left(\int_Y |h| \, d\nu \right) d\mu = +\infty.$$

Para todo $x \in X$ se cumple

$$\int_{(0,x)} h \, d\nu = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_0^x = \frac{1}{2x},$$

de donde:

$$\int_X \left(\int_Y |h| \, d\nu \right) d\mu \geq \frac{1}{2} \int_X \frac{d\mu}{x} = +\infty$$

En el siguiente ejemplo ambas integrales iteradas existen y sus valores coinciden pero la función no es integrable.

Ejemplo 11.22. Sean $X = Y = \mathbb{R}$, $S = T = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu = \nu =$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 = y \\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } x^2 + y^2 > 0 \end{cases}$$

entonces si $x \neq 0$

$$\int_{(0,\infty)} h_x \, d\nu = \frac{1}{2x} = - \int_{(-\infty,0)} h_x \, d\nu$$

por lo que $\int\limits_X h_x \, d\nu = 0$ y analogamente $\int\limits_Y h_y \, d\mu = 0$ si $y \neq 0$, pero

$$\int_{X\times T} |h| \, d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y |h| \, d\nu \right) d\mu = \int_X \frac{d\mu}{|x|} = +\infty.$$

Sugerimos al lector que consulte el capítulo 6 de la referencia [Be] que incluye una gran variedad de ejemplos y contraejemplos sobre medidas producto y el teorema de Fubini.

Con el teorema de Fubini es posible establecer las propiedades básicas de la operación convolución. (Ver los ejercicios (143), (144), (145), (146), (147) y (148)). Así mismo obtenemos el siguiente teorema de **integración por partes**, el cual enunciamos en una versión un poco más general que la usual.

Teorema 11.23. Sean $X = [a,b]$, S una σ-álgebra de subconjuntos de $[a,b]$ que contiene a la σ-álgebra de Borel, $\mu : S \to \mathbb{R}$ una medida y $f, g \in \mathcal{L}_\mu([a,b])$. Si $F, G : [a.b] \to \mathbb{R}$ se definen por:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \, d\mu \text{ y } G(x) = \int_{[a,x]} g \, d\mu,$$

entonces:

$$\int_{[a,b]} fG \, d\mu + \int_{[a,b]} gF^- \, d\mu = F(b)G(b)$$

en donde $F^-(a) = 0$ y $F^-(t) = \lim\limits_{s\to t^-} F(s)$ si $t \in (a,b]$.

Demostración. Definimos $\gamma : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ por la fórmula:

$$\gamma(x,t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \leq x, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que γ es $S \otimes S$-medible y además:

$$\int_{[a,b]} f(x)G(x) \, d\mu(x) = \int_{[a,b]} f(x) \left(\int_{[a,x]} g(t) \, d\mu(t) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_{[a,b]} \int_{[a,b]} f(x)\gamma(x,t) \, d\mu(t) \, d\mu(x).$$

Pero $f(x)\gamma(x,t) \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \mu)$ pues

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} |f(x)\gamma(x,t)| \, d(\mu \otimes \mu) \leq \int_{[a,b]} |f| \, d\mu \int_{[a,b]} |g| \, d\mu < +\infty.$$

Aplicando el teorema de Fubini obtenemos que:

$$\int_{[a,b]} f(x)G(x) \, d\mu(x) = \int_{[a,b]} \int_{[a,b]} f(x)\gamma(x,t) \, d\mu(x) \, d\mu(t)$$

$$= \int_{[a,b]} \int_{[t,b]} f(x)g(t) \, d\mu(x) \, d\mu(t) = \int_{[a,b]} g(t) \left\{ F(b) - F^-(t) \right\} d\mu(t)$$

$$= G(b)F(b) - \int_{[a,b]} g(x)F^-(x) \, d\mu(x)$$

lo cual prueba el teorema. $\square$

Observaciones 11.24. Note que el término $F(b) - F^{-}(t)$ corresponde a la expresión:

$$\int_{[t,b]} f\,d\mu = \lim_{s\to t^-} \int_{(s,b]} f\,d\mu = \lim_{s\to t^-} (F(b) - F(s)) = F(b) - F^{-}(t)$$

En general puede tenerse que $F(t) \neq F^{-}(t)$, esto debido a que $\mu(\{t\}) > 0$. Por lo que si $\mu(\{t\}) = 0$ para todo t (como es el caso de la medida de Lebesgue), la fórmula de integración por partes adquiere su forma más conocida.

Bibliografía

[Ba] *"The Elements of Integration and Lebesgue Measure"*. R.G. Bartle. Wiley Classics (1995).

[B-N] *"Functional Analysis"*. G. Bachman, L. Narici. Academic Press (1966).

[Bau] *"Measure and Integration Theory"*. H. Bauer. W. de Gruyter, Berlín. Studies in Mathematics # 26 (2001).

[Be] *"Measure and Integration"*. S.K. Berberian. Chelsea (1970).

[Bi] *"Probability and Measure"*. P. Billingsley. Wiley, New York (1979).

[Bu] *"Henri Lebesgue 1875-1941 Obituary"*. J.C. Burkill. Obituary Notices of the Fellows of The Royal Society, the Royal Society, Vol. 4 # 13, pp 483-490 (1944).

[C] *"Measure Theory"*. D.L. Cohn. Birkhäuser, Boston (1980).

[E-S] *"On the Sum of Two Borel Sets"*. P. Erdös, A.H. Stone. Proccedings of the American Math. Soc. # 25 pp 304-306 (1970).

[Fe] *"Geometric Measure Theory"*. H. Federer. Springer. Band 153 (1969).

[G-O] *"Counterexamples in Analysis"*. B. Gelbaum y J. Olmsted. Dover (2003).

[H-L-P] *"Inequalities"*. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. Cambridge (1973).

[Hal] *"Measure Theory"*. P.R. Halmos.
Springer G.T.M. # 18 (1974).

[Haw] *"Lebesgue Theory of Integration, it's Origins and Development"*.
T. Hawkins.
Chelsea (1976).

[H-S] *"Real and Abstract Analysis"*. E. Hewitt, K. Stromberg.
Springer G.T.M. # 25 (1965).

[Hi] *"Measure and Density of Sequences"*. William Hintzman.
The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part. 2
pp 133-134 (1996).

[J] *"The Theory of Functions of a Real Variable"*. R.L. Jeffery.
Dover (1985).

[K] *"Modern Theories of Integrations"*. M.H. Kestelman.
Dover (1960).

[L] *"Arzela's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral"*. W.A.J. Luxemberg.
The American Mathematical Monthly Vol. 78, pp 970-979 (1971).

[N] *"The Theory of Functions of a Real Variable"*. I.P. Natanson.
Ungar Vols. I, II (1974).

[O] *"Measure and Category"*. J.C. Oxtoby.
Springer G.T.M. # 2 (1980).

[P] *"An Introduction to Analysis and Integration Theory"*.
E.R. Phillips.
Dover (1985).

[Ro] *"Real Analysis"*. H.L. Royden.
Macmillan, Third Edition (1998).

[Ru] *"Real and Complex Analysis"*. W. Rudin.
Mac Graw-Hill (1974).

[Sa] *"Theory of the Integral"*. S. Saks.
Segunda Ed. Revisada, Dover (1964).

[S-G] *"Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach"*.
G.E. Shilov, B.L. Gurevich.
Dover (1977).

[St] *"An Elementary Proof of Steinhaus's Theorem"*. Karl Stromberg.
Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 36, No. 1
p 308 (1972).

[Ta] *"General Theory of Functions and Integration"*. A.E. Taylor.
Dover (1985).

[To] *"Real Variables"*. A. Torchinski.
Addison-Wesley Publishers (1998).

[W-Z] *"Measure and Integral"*. R.L. Wheeden, A. Zygmund.
Marcel Dekker Vol. 43 (1997).

[Z] *"An Introduction to the Theory of Integration"*. A.C. Zaanen.
Interscience Publisher, North Holland (1958).

Guía de ejercicios

El siguiente listado tiene por objeto orientar al lector acerca de la ubicación de los ejercicios al capítulo al que corresponden.

Capítulo 1) 1, 2, 3, 4, 5 i), 5 ii), 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Capítulo 2) 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Capítulo 3) 5 iii), 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Capítulo 4) 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 54, 55.

Capítulo 5) 50, 51, 52, 53, 56, 57, 58, 59.

Capítulo 6) 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.

Capítulo 7) 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91.

Capítulo 8) 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105.

Capítulo 9) 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120.

Capítulo 10) 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132.

Capítulo 11) 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150.

Ejercicios

1. Sea $\Re \subset P(X)$ una familia cerrada bajo uniones finitas y diferencias. Sea $(A_n)_1^\infty$ una sucesión de elementos de $\Re$. Pruebe que existe una sucesión $(E_n)_1^\infty$ de elementos de $\Re$ con las siguientes propiedades:

   i) $E_n \subset A_n$ para todo n.

   ii) $E_n \cap E_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$.

   iii) $\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$ $\left(\text{por lo tanto } \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

   (Sugerencia: Sea $E_1 = A_1$ y $E_n = A_n - \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$ si $n \geq 2$).

2. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una álgebra con la propiedad de que para cualquier sucesión de subconjuntos disjuntos $(E_n)_1^\infty$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, entonces pruebe que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

   (Sugerencia: Use el ejercicio (1)).

3. Pruebe con un ejemplo que una familia no vacía $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$, cerrada bajo intersecciones numerables y diferencia simétrica no es necesariamente un σ-anillo.

4. Una familia $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathbb{E}$ y es cerrada bajo uniones e intersecciones de familias numerables no es necesariamente una σ-álgebra.

   (Sugerencia: $X = \mathbb{R}, \mathbb{E} = \{(-\infty, a) : a \leq +\infty\} \cup \{(-\infty, b] : b < +\infty\}$).

5. Sean $E_1, \ldots, E_n \subset X$ dados.

   i) Pruebe: $x \in E_1 \triangle (E_2 \triangle E_3) \Leftrightarrow x \in E_j$ exactamente para un número impar de $j \in \{1, 2, 3\}$.
   Pruebe lo mismo para $(E_1 \triangle E_2) \triangle E_3$ y concluya que la diferencia simétrica es una operación asociativa.

ii) Generalice el inciso anterior como sigue:

$$x \in E_1 \triangle E_2 \triangle \ldots \triangle E_n \Leftrightarrow x \in E_j$$

exactamente para un número impar de $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

iii) Si además $E_1, \ldots, E_n \in S$ con (X, S, μ) un espacio de medida y $\mu(E_j) < \infty$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n$ entonces:

$$\begin{aligned}\mu(E_1 \triangle E_2 \triangle \ldots \triangle E_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - 2^1 \sum_{i<j} \mu(E_i \cap E_j) \\ &+ 2^2 \sum_{i<j<k} \mu(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} 2^{n-1} \mu(E_i \cap \cdots \cap E_n)\end{aligned}$$

(Sugerencia: Pruebe los casos $n = 2$ y $n = 3$ y luego use inducción. Compare con la "fórmula de inclusión-exclusión" para obtener $\mu(E_i \cup \cdots \cup E_n)$).

6. Compruebe que la operación diferencia simétrica $\triangle$ satisface las siguientes propiedades:

   i) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$
   ii) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$
   iii) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$
   iv) $(A_1 - A_2) \triangle (B_1 - B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$

   (Sugerencia: $x \notin A_i \triangle B_i$ si y sólo si $\chi_{A_i}(x) = \chi_{B_i}(x) \quad (i = 1, 2)$).

7. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{A} = \{$ unión finita disjunta de intervalos de la forma $(a, b], (-\infty, b]$ y $(a, +\infty)\}$

   Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra, pero **no** una σ-álgebra.

8. Sea $\mathbb{E} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ dada, denotamos

$$A^a = \begin{cases} A & \text{si } a = 0 \\ A^c & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

   Para cada $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ definimos $E_a = A_1^{a_1} \cap A_2^{a_2} \cap \cdots \cap A_n^{a_n}$. Pruebe:

   i) $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \left\{ \bigcup_{a \in D} E_a : D \subset \{0, 1\}^n \right\}$ (convenimos en poner $\bigcup_{a \in \emptyset} E_a = \emptyset$).
   ii) Concluya que $\#(\mathcal{A}(\mathbb{E})) \leq 2^{2^n}$

   (Sugerencia: para probar la cerradura bajo complementación en (i), empiece con E_a y luego trate el caso general).

9. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra con un número finito de elementos. Pruebe que $\#(\mathcal{A})$ es una potencia de 2.

   (Sugerencia: Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ aquellos elementos diferentes del vacío obtenidos por el método del ejercicio anterior con $\mathbb{E} = \mathcal{A}$. Pruebe que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{E_1, E_2, \ldots, E_p\})$, el cual puede ponerse en correspondencia biunívoca con $\{0, 1\}^p$).

10. Si $\#(X) \geq s$, construya un álgebra $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{P}(X)$ con $\#(\mathcal{A}_p) = 2^p$ para todo $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

11. Sea $S \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra con un número infinito de elementos. Pruebe que S es no-numerable (i.e. no hay σ-álgebra numerable infinita).

    (Sugerencia: Sea $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset S$ un conjunto infinito. Imitando la construcción de los subconjuntos E_a como en (8) pero ahora con $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, obtenga una familia numerable infinita $\{E_1, E_2, \ldots\}$ de subconjuntos en S no vacíos y ajenos. Halle una función inyectiva $i : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to S$).

12. Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ fija. Pruebe que para todo $A \in S(\mathbb{E})$, existe una subfamilia numerable $\mathbb{E}_0 \subset \mathbb{E}$ tal que $A \in S(\mathbb{E}_0)$.

    (Sugerencia:[13] Sea $S = \bigcup\{S(\mathbb{E}') : \mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$ es numerable$\}$. Pruebe que S es una σ-álgebra y que $\mathbb{E} \subset S = S(\mathbb{E})$).

13. Sea $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacía dada. Pruebe: $\mathfrak{R}$ es un anillo si y sólo si $\{\chi_A : A \in \mathfrak{R}\}$ es un anillo algebraico (con las operaciones de suma y producto módulo 2).

[13] En general unión de σ-álgebras puede no ser una σ-álgebra.

14. Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el límite inferior y el límite superior de (E_n) denotados por: $\varliminf_{n\to\infty}(E_n)$ y $\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)$ respectivamente como los subconjuntos de X definidos por:

$$\varliminf_{n\to\infty}(E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k \quad \text{y} \quad \varlimsup_{n\to\infty}(E_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k \quad \text{(Borel 1905)}$$

Pruebe que:

i) $x\in\varliminf_{n\to\infty}(E_n) \Leftrightarrow$ existe $n=n(x)$ tal que $x\in E_m$ para todo $m\geq n$.

ii) $x\in\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)\Leftrightarrow x\in E_n$ para una infinidad de n's.

iii) $\varliminf_{n\to\infty}(E_n)\subset\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)$. Dé un ejemplo en que la contención sea propia.

iv) $X-\varliminf_{n\to\infty}(E_n)=\varlimsup_{n\to\infty}(X-E_n)$ y $X-\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)=\varliminf_{n\to\infty}(X-E_n)$.

v) Si $E_n\subset E_{n+1}$ ó $E_n\supset E_{n+1}$ para todo n, entonces $\varliminf_{n\to\infty}(E_n)=\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)$

15. Sean $(E_n)_1^\infty$ y $(F_n)_1^\infty$ dos sucesiones de subconjuntos de X. Pruebe:

i) $\varlimsup_{n\to\infty}(E_n\cap F_n)\subset\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)\cap\varlimsup_{n\to\infty}(F_n)$. Dé un ejemplo en el que la contención sea propia y pruebe que la igualdad se da si $\cap$ se reemplaza por $\cup$.

ii) $\varliminf_{n\to\infty}(E_n)\cup\varliminf_{n\to\infty}(F_n)\subset\varliminf_{n\to\infty}(E_n\cup F_n)$. Dé un ejemplo en el que la contención sea propia y pruebe que la igualdad se da si $\cup$ se reemplaza por $\cap$.

16. Sea (a_n) una sucesión de números reales (extendidos), definimos el límite inferior y el límite superior denotados $\varliminf_{n\to\infty}a_n$ y $\varlimsup_{n\to\infty}a_n$ respectivamente como los números reales (extendidos) a_* y a^* respectivamente dados por:

$$a_*=\sup_{k\geq 1}\inf_{k\geq n}\{a_k\} \quad \text{y} \quad a^*=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}\{a_k\}$$

(Convención: Si $S\subset\mathbb{R}$ no esta acotado superiormente definimos *sup* $S=+\infty$. Análogamente si S no esta acotado inferiormente definimos inf $S=-\infty$). Pruebe:

i) a_* y a^* siempre existen en $\overline{\mathbb{R}}$ y $a_*\leq a^*$.

ii) (a_n) converge a $a\in\overline{\mathbb{R}}\Leftrightarrow a_*=a=a^*$.

17. Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Pruebe:

i) $\chi_{\varliminf_{n\to\infty}(E_n)}=\varliminf_{n\to\infty}\chi_{E_n}$ y $\chi_{\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)}=\varlimsup_{n\to\infty}\chi_{E_n}$.

ii) $(\chi_{E_n})_1^\infty$ converge si y sólo si $\varliminf_{n\to\infty}(E_n)=\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)$. En cuyo caso $\varliminf_{n\to\infty}\chi_{E_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\chi_{E_n}$.

18. Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos $D_1=E_1$, $D_2=D_1\triangle E_2$ y en general $D_{n+1}=D_n\triangle E_{n+1}$ para $n=1,2,\ldots$ Pruebe:

$$\varliminf_{n\to\infty}(D_n)=\varlimsup_{n\to\infty}(D_n)\Leftrightarrow\varliminf_{n\to\infty}(E_n)=\varlimsup_{n\to\infty}(E_n)=\emptyset$$

(Sugerencia: Use el anterior).

19. Sea $f:X\to Y$ una función y sea $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(Y)$ dado. Pruebe que:

$$\mathcal{A}\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right)=f^{-1}\left(\mathcal{A}(\mathcal{B})\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right)=f^{-1}\left(\mathcal{S}(\mathcal{B})\right)$$

(Sugerencia: Considere a la familia $K=\{D\subset Y: f^{-1}(D)\in\mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{B}))\}$ y análogamente con $\mathcal{S}(f^{-1}(\mathcal{B}))$).

20. Sea $X=\mathbb{R}$ y $\mathcal{S}=\{A\subset\mathbb{R}: A$ ó $\mathbb{R}-A$ es finito o numerable $\}$. Describa a las funciones $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ que son $\mathcal{S}$-medibles.

21. Sea $(X,\mathcal{S})$ un espacio medible y sea $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{S}$-medible, pruebe que

$$\{x\in X: f(x)=a\}\in\mathcal{S} \quad \text{para toda } a\in\overline{\mathbb{R}}$$

Dé un ejemplo de una función $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\{x\in X: f(x)=a\}\in\mathcal{S} \quad \text{para toda } a\in\overline{\mathbb{R}}$$

pero que no sea $\mathcal{S}$-medible.

22. Sea (X,S) un espacio medible. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función S-medible. Definimos $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0,\ \pm\infty \\ \frac{1}{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0,\ \pm\infty \end{cases}$$

Pruebe que $\frac{1}{f}$ es S-medible.

23. Sean $f, h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ S-medibles $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas. Pruebe que si g es S-medible entonces $mid\ \{f, g, h\}$ es S-medible. Inversamente si $mid\ \{f, g, h\}$ es S-medible para toda f y h S-medibles, entonces g es S-medible.

Aquí $mid\ \{a, b, c\}$ denota el valor de enmedio entre a, b y c.

(Sugerencia: Probar primero que:

$$mid\ \{a, b, c\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{b, c\}, \max\{a, c\}\}).$$

24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel medible.

(Sugerencia: $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\{f(x + 1/n) - f(x)\}$ $(x \in \mathbb{R})$. Pruebe que $f_a(x) = f(x + a)$ es Borel medible, para cada $a \in \mathbb{R}$ fija).

25. Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea

$$A = \{x \in X : (f_n(x)) \text{ converge en } \mathbb{R}\}.$$

Pruebe que

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

26. Hipótesis como en el caso anterior. Si $a \in \mathbb{R}$ es dada, entonces:

$$\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_l(x) - a| > \frac{1}{k}\right\}$$

27. Sea $X = \mathbb{N}$ y $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pruebe que toda medida μ en (X,S) se obtiene a partir de una única sucesión de reales extendidos no-negativos (a_n) como sigue:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset, \\ \sum_{n\in E} a_n & \text{si } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Pruebe además que:

i) μ es finita si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii) μ es σ-finita si y sólo si $a_n < +\infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

28. Sea $A \subset \{1, 2, \ldots, 99\}$ un subconjunto consistente de exactamente 10 elementos. Pruebe que existen E, F subconjuntos de A ajenos y no vacíos tales que

$$\sum_{a\in E} a = \sum_{a\in F} a$$

(Sugerencia: Pruebe que $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(E) = \sum_{a\in E} a$ no puede ser inyectiva).

29. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $E_1, \ldots, E_n \in S$.

Para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fija, sea $C_m = \{x \in X : x \in E_j$ para exactamente m índices $j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Pruebe:

i) $C_m \in S$.

ii) $\sum_{m=1}^{n} \mu(E_m) = \sum_{m=1}^{n} m\mu(C_m)$.

iii) Si $D_m = \{x \in X : x \in E_j$ para a lo más m índices $j \in \{1, \ldots, n\}\}$ $(1 \leq m \leq n)$ entonces:

$$\sum_{m=1}^{n} \mu(E_m) \leq \sum_{m=1}^{n} m\mu(D_m).$$

iv) Suponga ahora que $\mu(X) = 1$ y que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ son tales que cada $x \in X$ pertenece al menos a r de los conjuntos A_i. Concluya que existe al menos un índice i tal que $\mu(A_i) \geq r/n$.

30. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de S.

   i) Si $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ para toda $n \neq m$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(casi } \sigma\text{-aditividad)}$$

   ii) Si $\mu(A_n \triangle B_n) = 0$ para toda n entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right), \ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangle \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n\right) \ \text{ y } \ \mu\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangle \underline{\lim_{n\to\infty}} B_n\right)$$

   son todos iguales a cero.

   (Sugerencia: Use la sugerencia del ejercicio (6)).

31. Sea $(p_n)_1^{\infty}$ una sucesión de polinomios tal que convergen uniformemente en $[a, b]$ a cierta función f. Sea $H_n = \{x \in [a, b] : p_n(x) = f(x)\}$. Pruebe que si f no es un polinomio en $[a, b]$, entonces $\overline{\lambda}(H_n) \to 0$ si $n \to \infty$.

   (Sugerencia: Si $p_n \neq p_m$ entonces $\overline{\lambda}(H_n \cap H_m) = 0$. Concluya que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}(H_n) < \infty$).

32. (La parte fácil del lema de Borel-Cantelli).

   Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (E_n) una sucesión de elementos de S tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$. Pruebe que $\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) = 0$.

33. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (E_n) una sucesión de elementos de S. Pruebe:

   i) $\mu\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu(E_n)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

   ii) Si $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$ entonces $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(E_n) \leq \mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

   iii) Pruebe con un ejemplo que (ii) podría no cumplirse si

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty.$$

34. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{F} = \{A \in S : \mu(A) < +\infty\}$. Definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ poniendo: $A \sim B (A, B \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$.

   i) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   ii) Denotamos por $\widetilde{\mathcal{F}}$ al conjunto de las clases de equivalencias y por $[A]$ la clase de equivalencia de $A \in \mathcal{F}$. Pruebe que $d : \widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ dada por $d([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$ está bien definida y que $\left(\widetilde{\mathcal{F}}, d\right)$ es un espacio métrico completo.

   (Sugerencia: Si $([A_n])_1^{\infty}$ es una sucesión d-Cauchy, halle una subsucesión $([A_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ tal que $d\left([A_{n_k}], [A_{n_{k+1}}]\right) < \frac{1}{2^k}$. Sea $A_* = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_{n_k}$. Pruebe que $A_* \in \mathcal{F}$ y usando la sugerencia del ejercicio (6) pruebe que

$$A_* \triangle A_{n_k} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} A_{n_j} \triangle A_{n_{j+1}}$$

   por lo que $d\left([A_{n_k}], [A_*]\right) \to 0$. Concluya que $d\left([A_n], [A_*]\right) \to 0$).

35. Hipótesis y notación como el anterior. Pruebe que las funciones: $\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ con valores: $[A \triangle B]$, $[A \cup B]$, $[A \cap B]$ y $[A - B]$ en $([A], [B]) \in \widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{F}}$ son d-uniformemente continuas, si $\mu(X) < +\infty$, pruebe lo análogo para la operación: $[A] \mapsto [X - A]$.

   (Sugerencia: Use el ejercicio (6)).

36. (La compleción de un espacio de medida).

   Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{N} = \{N \in S : \mu(N) = 0\}$ el σ-anillo de conjuntos S-medibles de medida cero. Definimos

$$\overline{S} = \{(E \cup M_1) - M_2 : E \in S \ \text{ y } \ M_1 \subset N_i \in \mathcal{N} \ \ (i = 1, 2)\}.$$

Pruebe

i) $F \in \overline{S} \Leftrightarrow F = E \cup M_0$ con $E \in S$ y M_0 un subconjunto de algún $N_0 \in \mathcal{N}$. (E y M_0 no son necesariamente únicos).

ii) $\overline{S}$ es una σ-álgebra y $S \subset \overline{S}$.
(Sugerencia: Use (i)).

iii) $\overline{\mu} : \overline{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\overline{\mu}(E \cup M_0) = \mu(E)$ está bien definida, es una medida en $\overline{S}$ y $\overline{\mu}|_S = \mu$.

37. Hipótesis y notación como en el caso anterior.[14] Pruebe:

i) Si $F \in \overline{S}$ tal que $\overline{\mu}(F) = 0$, entonces $A \in \overline{S}$ para toda $A \subset F$. Más generalmente:

ii) Si $E \subset A \subset F$, con $E, F \in \overline{S}$ y $\overline{\mu}(F - E) = 0$, entonces $A \in \overline{S}$.

38. Sea (X, S) un espacio medible y sea $\mu : S \to \mathbb{R}$ una función finita, no negativa y aditiva. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para sucesiones (A_k) de elementos de S:

i) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ $(A_l \cap A_k = \emptyset, l \neq k)$ (σ-aditividad).

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim_{k \downarrow \infty} \mu(A_k)$ (continuidad por arriba).

iii) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim_{k \uparrow \infty} \mu(A_k)$ (continuidad por abajo).

iv) $\mu\left(\lim_{k \to \infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$ (continuidad).[15]

39. Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $\mathcal{D} \subset S$ una familia consistente de conjuntos ajenos entre sí. Sea $E \in S$ con $\mu(E) > 0$ fijo.

[14] La propiedad (ii) justifica el nombre de μ-compleción que se da al espacio de medida $(X, \overline{S}, \overline{\mu})$.

[15] Se supone que (A_k) es tal que $\underline{\lim}_{k \to \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \to \infty} A_k$ y $\lim_{k \to \infty} A_k$ denota al conjunto común.

Pruebe que la familia $\mathcal{D}_E = \{D \in \mathcal{D} : \mu(E \cap D) > 0\}$ es a lo sumo numerable.
(Sugerencia: Empiece con el caso $\mu(E) < +\infty$).

40. Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Supongamos que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in S$ para toda n, $\mu(A) < \infty$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A) + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Pruebe:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) \leq \mu(E \cap A) + \varepsilon$ para toda $E \in S$.
(Sugerencia: Aplique el ejercicio (1) a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$).

ii) Sea $C = \{x \in A : x \in A_n$ para al menos dos n's$\}$, entonces $C \in S$ y $\mu(C) \leq \varepsilon$.
(Sugerencia: Considere $A - C$).

41. Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función S-medible. Pruebe que existe una sucesión de funciones S-simples $(s_n)_1^{\infty}$ tales que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$ y $\mu(\{x \in X : s_n(x) \neq 0\}) < \infty$ para toda n.

42. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $f \in M^+(X, S)$ dados. Pruebe que la función $\mu_f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu$ $(E \in S)$ es una medida con la propiedad de que $\mu_f(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$.
(Sugerencia: Use el teorema de la convergencia monótona).

43. Sea $f \in \overline{M^+}(X, S)$ tal que $\int f\, d\mu < +\infty$ Pruebe:

i) $\mu(\{x \in X : f(x)\} = +\infty) = 0$.

ii) $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ-finito.

44. Si $\mu(X) < +\infty$ y $f \in M^+(X, S)$ entonces:

$$\int f\, d\mu < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^n\}) < +\infty.$$

45. Si $f \in M^+(X,S)$ es acotada, entonces

$$\int f\,d\mu < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu\left(\left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2^n}\right\}\right) < +\infty.$$

Puede suponerse que $\mu(X) = +\infty$.

46. Pruebe:

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int_E f\,d\mu : E \in S, \mu(E) < +\infty\right\}$$

para toda $f \in M^+(X,S)$ con $\int f\,d\mu < +\infty$.

47. Sea $f \in M^+(X,S)$ dada. Si $P = (0 = t_0 < t_1 < \dots)$ es una partición de $[0,+\infty)$ denotamos $\|P\| = \sup\{t_{k+1} - t_k\}$. Pruebe que si $\int f\,d\mu < +\infty$, entonces:

$$\int f\,d\mu = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \varsigma_k \mu(\{x \in X : t_k \leq f(x) < t_{k+1}\})$$

con $\{\varsigma_k\}$ cualquier conjunto de puntos satisfaciendo $\varsigma_0 = 0$ y $\varsigma_k \in [t_k, t_{k+1})$ si $k \geq 1$. (Cada una de las anteriores se conoce como una suma de Lebesgue).

(Sugerencia: Pruebe que $\int\limits_{\{x\in X: f(x)<t_1\}} f\,d\mu \to 0$ si $t_1 \to 0$).

48. i) Pruebe con contraejemplos que no hay equivalente al teorema de la convergencia monótona si la sucesión de funciones (f_n) es monótona decreciente. Sin embargo, pruebe que si $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ y $\int f_1\,d\mu < +\infty$ entonces:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu.$$

ii) Pruebe que la conclusión del lema de Fatou podría fallar si no se requiere que $f_n \geq 0$.

49. Suponga el lema de Fatou y pruebe el teorema de la convergencia monótona.

50. Pruebe:

i) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $M(X,S)$ y si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\,d\mu < +\infty$ tal que $f_n \geq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$ entonces:

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu\ .$$

ii) Si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\,d\mu < +\infty$ tal que $f_n \leq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$. entonces:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \leq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

51. (Lema del promedio).

Sea $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ tal que $\left|\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_E f\,d\mu\right| \leq k$ con $k \geq 0$ constante, para todo $E \in S$ con $0 < \mu(E) < +\infty$. Pruebe que $|f| \leq k$ (c.d rel. μ).

(Sugerencia: Empiece probando que si $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, entonces:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} < +\infty, \text{ para todo } \alpha > 0)).$$

52. Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,d\mu < +\infty.$$

Pruebe que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a una función $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ que satisface:

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$$

¿Qué significa lo anterior si $X = \mathbb{N}$, $S = P(\mathbb{N})$ y μ es la medida de conteo?

53. Sea (f_n) una sucesión de elementos de $M^+(X,S)$ tal que: $f_n \to f$ (c.d. rel. μ) y $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu < +\infty$. Pruebe que

$$\int_E f_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu \quad \text{para todo } E \in S$$

(Sugerencia: Aplique el lema de Fatou a las sucesiones $(f_n\chi_E)$ y $(f_n\chi_{X-E})$).

54. (Una generalización del teorema de la convergencia dominada de H. Lebesgue).

Sea (g_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{L}_1^+(X,S,\mu)$, tal que

$$g_n \to g \text{ (c.d. rel. } \mu\text{), con } g \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\mu) \text{ y } \int g_n\, d\mu \to \int g\, d\mu.$$

Sea (f_n) una sucesión en $M(X,S)$ tal que $|f_n| \le g_n$ y $f_n \to f \in M(X,S)$ (c.d. rel. μ), entonces:

i) $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ y

ii) $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ para todo $E \in S$.

55. (El teorema de H. Lebesgue).

Para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ fijas, sea $g_\delta(t) = \inf\{f(x) : x \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]\}$ y sea $h_\delta(t) = \sup\{f(x) : x \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]\}$. Definimos la envoltura inferior de f y la envoltura superior de f como:

$$g(t) = \lim_{\delta \uparrow 0} g_\delta(t) \quad \text{y} \quad h(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} h_\delta(t) \quad \text{(respectivamente)}$$

Pruebe:

i) g y h son Borel-medibles.
(Sugerencia: Pruebe que $g^{-1}((\alpha, +\infty))$ y $h^{-1}((-\infty, \alpha))$ son abiertos relativos de $[a,b]$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$).

ii) $g \le f \le h$. Además $g(t) = f(t) = h(t) \Leftrightarrow f$ es continua en t.

iii) Si f es acotada y no-negativa, entonces

$$\underline{R}\int_a^b f\, dt = \int_{[a,b]} g\, d\lambda \quad \text{y} \quad \int_{[a,b]} h\, d\lambda = \overline{R}\int_a^b f\, dt$$

en donde λ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{B}_{[a,b]}$ y $\underline{R}\int$, $\overline{R}\int$ denotan la integral inferior y superior de Riemann.
(Sugerencia: Sea (P_n) una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $P_n \le P_{n+1}$ y $\|P_n\| \to 0$. Si $P_n = (a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = b)$ defina $e_n(t) = \inf\{f(\varsigma) : \varsigma \in (t_i^n, t_{i+1}^n)\}$ y $E_n(t) = \sup\{f(\varsigma) : \varsigma \in (t_i^n, t_{i+1}^n)\}$ y $e_n(t) = g(t)$, $E_n(t) = h(t)$ si $t = t_i^n$ para alguna $i \in \{0, 1, \ldots, k_n\}$. Pruebe que $e_n \uparrow g$, $E_n \downarrow h$ y use el TCM y el ejercicio (48) inciso (i)).

iv) f es Riemann-integrable si y sólo si f es continua (c.d. rel. λ). (Teorema de Lebesgue).

v) Si f es Borel-medible y Riemann-integrable, entonces

$$R\int_a^b f\, dt = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$$

(ver el ejercicio (91) inciso (ii)).

56. Pruebe que $\int_0^1 \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ existe como integral impropia de Riemann, sin embargo pruebe que $\frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \notin \mathcal{L}_1((0,1), \mathbb{B}_{(0,1)}, \lambda)$. ¿Contradice esto el ejercicio (55) inciso (v)?

57. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-medible tal que su restricción a $[a,b]$ es Riemann-integrable siempre que $a < b \in \mathbb{R}$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} R\int_{-n}^{n} |f(x)|\, dx < +\infty$. Pruebe que $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = R\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

(ver el ejercicio (91) inciso (iii)).

58. (La función Gamma $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$).

i) Sea $\alpha > 0$. Pruebe que $\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = \Gamma(\alpha)$ existe.

(Sugerencia: Examine por separado la integral sobre $(0,1)$ y $[1,\infty)$).

ii) Pruebe:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\,dx = \Gamma(\alpha)$$

(Sugerencia: $(1-\frac{x}{n})^n \le (1-\frac{x}{n+1})^{n+1}$ si $\frac{x}{n} < 1$).

iii) Pruebe:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}x^{\alpha-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{si } \alpha > 1.$$

(Sugerencia: $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots$).

59. Pruebe el ejercicio (34) usando la completez de $\mathcal{L}_1(X,S,\mu)$.

(Sugerencia: $\mu(A\Delta B)=\int|\chi_A-\chi_B|\,d\mu$ $(A,B\in S)$. Si $\int|\chi_{A_n}-f|\,d\mu\to 0$ $(n\to+\infty)$, pruebe que $f^2\in\mathcal{L}_1(\mu)$ y que $\int|\chi_{A_n}-f^2|\,d\mu\to 0$ también).

60. Sea (X,S,μ) un espacio de medida. Si $f\in\mathcal{L}_{p_1}(\mu)\cap\mathcal{L}_{p_2}(\mu)$ con $1\le p_1<p_2<+\infty$, entonces $f\in\mathcal{L}_{p_1}(\mu)$ para todo $p\in(p_1,p_2)$.

(Sugerencia: $p=\alpha p_1+(1-\alpha)p_2$ para cierta $\alpha\in(0,1)$. Note que $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{1-\alpha}$ son exponentes conjugados).

61. (Generalización de la desigualdad de Hölder).

Sea (X,S,μ) un espacio de medida $p_1,p_2,\ldots,p_n\in(1,+\infty)$ tales que

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1 \quad \text{y} \quad f_i\in\mathcal{L}_{p_i}(\mu) \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Pruebe que:

i) $f_1f_2\cdots f_n\in\mathcal{L}_1(\mu)$.

ii) $\int|f_1f_2\cdots f_n|\,d\mu\le\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_n\|_{p_n}$.

iii) La igualdad ocurre en (ii) si y sólo si existe $\varphi\in\mathcal{L}_1^+(\mu)$ y constantes no negativas $c_1,\ldots,c_n$ tales que $|f_i|^p=c_i\varphi$ (c.d rel. μ).

(Sugerencia: Inducción matemática).

62. Sean (X,S,μ) un espacio de medida finita y $p\in(0,+\infty)$ dados. Pruebe que si $r\in(0,p)$ y $f\in\mathcal{L}_p(\mu)$, entonces $f\in\mathcal{L}_r(\mu)$ y $\|f\|_r\le\|f\|_p\mu(X)^s$ con $s=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$.

(Sugerencia: Aplique la desigualdad de Hölder $|f|^r$ y $g=1$).

63. Sea $X=(0,1)$, $S=\mathbb{B}_{(0,1)}$ y λ = medida de Lebesgue. Pruebe que $\mathcal{L}_p(\lambda)\subsetneq\bigcap_{0<r<p}\mathcal{L}_r(\lambda)$ para toda $p>0$ fija.

(Sugerencia: Si $p=1$, considere $f_1(x)=\frac{1}{x}$, si $p\ne 1$ modifique a f_1).

64. Sean (X,S,μ) un espacio de medida finita y $f\in\mathcal{L}_\infty(\mu)$, dados. Pruebe que:

$$\|f\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$$

(Si $\mu(X)=1$ entonces por el ejercicio (62), el límite es creciente).

65. Sean $X=(0,+\infty)$, y λ = medida de Lebesgue en $\mathbb{B}_{(0,+\infty)}$. Sea $p\in(0,+\infty)$ fija.

i) Pruebe que existe $f_p : X\to\mathbb{R}$ continua con la siguiente propiedad

$$f_p\in\mathcal{L}_q(\lambda) \quad (q\in(0,+\infty)) \quad \Leftrightarrow q=p$$

(Sugerencia: Si $p=1$, considere a la función $f_1(x)=\frac{1}{x(1+|\log x|)^2}$. Examine los casos $x\in(0,1)$ y $x\in(1,+\infty)$ para concluir que $f_1\in\mathcal{L}_1(\mu)$. Utilice la desigualdad $\rho(1+\log t)\le t^\rho$ $(t\ge 1,\rho\in(0,1))$, para $t=\frac{1}{x}$ si $q>1$ y $x\in(0,1)$ y para $t=x$, si $q\in(0,1)$ y $x\ge 1$. Para $p\ne 1$ modifique a f_1).

ii) Pruebe que existe $f:(0,a)\to\mathbb{R}$ $(a>0)$ continua tal que $f\notin\mathcal{L}_q(\mu)$ para toda $q\in(0,+\infty)$.

(Sugerencia: $f(x)=e^{1/x}$).

66. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie convergente de números reales positivos. Sea $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ una enumeración. Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(x - r_k)$. Pruebe

i) $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$. (De hecho $\int f \, d\lambda = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, por lo que $f(x) < +\infty$ (c.d. rel. λ)).

ii) $f \notin \mathcal{L}_2(a, b)$ si $a < b$.

(Sugerencia: Para (i) use el TCM y para (ii) la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).

67. Sea (X, S, μ) como en el ejercicio (65). Sea $p \in (0, +\infty)$ fija y pruebe

$$\bigcup_{p<q} \mathcal{L}_q(\mu) \subsetneq \mathcal{L}_p(\mu)$$

(Sugerencia: Considere $f_1(x) = \frac{1}{x(1+|\log x|)^2}$ si $p = 1$ y modifique f_1 si $p \neq 1$).

68. Hipótesis y notación como en el ejercicio (63). Pruebe que

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) \subsetneq \bigcap_{0<p<+\infty} \mathcal{L}_p(\mu)$$

(Sugerencia: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} < +\infty$ para toda $p \in (0, +\infty)$).

69. Sea (X, S, μ) un espacio de medida finita con $\mu(X) = 1$. Definimos

$$\log(0) = -\infty \quad \text{y} \quad \exp(-\infty) = 0.$$

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y pruebe

i) $\int \log(|f|) \, d\mu \leq \log\left(\int |f| \, d\mu\right)$. La igualdad ocurre si y sólo si $|f|$ es constante (c.d. rel. μ).
(Sugerencia: Verifique la desigualdad $\log(t) \leq t - 1$ si $t \in [0, +\infty)$ con la igualdad $t = 1$. Sustituya t con $\frac{|f|}{\|f\|_1}$ e integre).

ii) $\lim_{r \downarrow 0} \|f\|_r = exp\left(\int \log(|f|) \, d\mu\right)$. Compare con el ejercicio (64).
(Sugerencia: Pruebe que $\frac{t^r - 1}{r} \downarrow \log\, t (r \downarrow 0)$ para toda $t \in [0, +\infty)$ para obtener

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r}\left(\int |f|^r \, d\mu - 1\right) = \int \log |f| \, d\mu$$

Use el ejercicio (48) inciso (i) para concluir que

$$\frac{1}{r}\left(\int |f|^r \, d\mu - 1\right) \geq \frac{1}{r} \log \int |f|^r \, d\mu = \int \log |f| \, d\mu).$$

70. (Desigualdad de J.L.W.V. Jensen (1906)).

i) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo con más de un punto y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, es decir, $\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$ para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in (0, 1)$. Pruebe que para todo $x_0 \in int(I)$ existe una recta a través del punto $(x_0, \varphi(x_0))$, digamos con ecuación: $y = ax + b$ tal que $ax + b \leq \varphi(x)$ para toda $x \in I$. (Una recta con tal propiedad se llama recta soporte en el punto).
(Sugerencia: Pruebe que $D^-(\varphi)(x_0)$ y $D^+(\varphi)(x_0)$ existen en todo $x_0 \in int(I)$, satisfacen $D^-(\varphi)(x_0) \leq D^+(\varphi)(x_0)$ y tome cualquier $a \in [D^-(\varphi)(x_0), D^+(\varphi)(x_0)]$).

ii) Sea (X, S, μ) un espacio de medida con $\mu(X) = 1$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, entonces

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \varphi(f) \, d\mu \quad \text{(Desigualdad de Jensen)}$$

En particular $\int \varphi(f) \, d\mu$ existe en $(-\infty, +\infty]$.
(Sugerencia: Para cierta recta soporte adecuada $y = ax + b$ se tiene

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) = \int (af + b) d\mu \leq \int \varphi(f) \, d\mu).$$

71. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que $\mu(E_f) < \infty$ donde
$$E_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$
entonces:
$$\lim_{n\to\infty} \int |f|^{1/n} d\mu = \mu(E_f)$$
¿Es cierto el resultado si no se supone que $\mu(E_f) < +\infty$?

72. (La otra desigualdad de Hölder)

Sea $p \in (0,1)$ y $q < 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $f \in \mathcal{L}_p^+(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}_q^+(\mu)$ tal que $0 < \int g^q \, d\mu < \infty$. entonces
$$\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq \int fg \, d\mu$$
(Sugerencia: Sea $p_1 = \frac{1}{p} > 1$. Sea $h = (fg)^p$ y $k = g^{-p}$ entonces $h \in \mathcal{L}_{p_1}(\mu)$ y $k \in \mathcal{L}_{q_1}(\mu)$. Con $q_1 = 1 - \frac{1}{p_1}$. Aplicar la desigualdad de Hölder usual).

73. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $f \in M(X,S)$. Sea
$$J = \left\{p \geq 1 : \int |f|^p \, d\mu < \infty\right\}.$$
Sea $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(p) = \int |f|^p \, d\mu$. Pruebe:

i) J es un intervalo (posiblemente vacío o con un solo punto) y que φ es continua.

ii) $\log(\varphi)$ es convexa en el interior de J.

(Sugerencia: Use el ejercicio (60)).

74. Pruebe directamente que el espacio normado $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq +\infty$, es completo.

75. Pruebe que:

i) $\ell_p \subsetneq \bigcap_{0<p<r} \ell_r$ para todo $p > 0$ fijo.

ii) $\|x_n\|_r \leq \|x_n\|_p$ si $(x_n) \in \ell_p$ y $0 < p < r \leq +\infty$.

Compare con el ejercicio (62).

(Sugerencia: Pruebe que basta considerar los casos $1 = p < r$ y $p < r = 1$. Para establecerlos es útil la desigualdad $(1+t)^s \geq 1 + t^s$ $(t \geq 0)$ si $s \geq 1$, la cual se invierte si $s \in (0,1)$). Compare con el ejercicio (62).

76. Pruebe que $\bigcup_{p<\infty} \ell_p \subsetneq \ell_\infty$

(Sugerencia: Considere la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$).

77. Sea (X,S,μ) un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $0 < p < +\infty$, y $\varepsilon > 0$ dadas. Pruebe que:

i) Existe $g \in \mathcal{L}_p(\mu) \cap \mathcal{L}_\infty$ tal que: $\|f - g\|_p < \varepsilon$.
(Sugerencia: Sea (g_n) una sucesión de truncamientos de f con $g_n \to f$. Observe que $|g_n| \leq |f|$ y $|f - g_n| \leq |f|$ para toda $n \in \mathbb{N}$).

ii) Existe $s \in \mathcal{L}_p(\mu)$ simple tal que $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

78. (Recíproco de la desigualdad de Hölder).

Sean (X,S,μ) un espacio de medida σ-finita y $g \in M(X,S)$ tales que $gs \in \mathcal{L}_1(\mu)$ para toda s simple en $\mathcal{L}_p(\mu)$, $p \in (1,+\infty)$ fijo. Suponga que existe $A \geq 0$ tal que $\left|\int gs \, d\mu\right| \leq A\|s\|_p$ para toda s. Pruebe que $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y que $\|g\|_q \leq A$.

(Sugerencia: Halle una sucesión de funciones simples (t_n) tal que $0 \leq t_n \leq t_{n+1}$, $t_n \uparrow |g|^q$ y $\mu(\{x \in X : t_n(x) \neq 0\}) < +\infty$ para todo n. (Ver ejercicio (41).

Si $s_n = (t_n)^{1/p} \, sgn(g)$ entonces s_n es simple, pertenece a $\mathcal{L}_p(\mu)$ y $t_n \leq gs_n$. Use la hipótesis y el teorema de la convergencia monótona aplicado a la desigualdad anterior).

79. Establezca el siguiente resultado de F. Riesz.

i) Sea $p \in [1,+\infty)$ fija y (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_p(\mu)$ tal que $f_n \to f$ (c.d. rel. μ) con $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$. Entonces:
$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty) \Leftrightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad (n \to \infty).$$
(Sugerencia: El ejercicio (54) es útil).

ii) Pruebe que el inciso anterior es falso si $p = +\infty$.
(Sugerencia: $f_n(x) = \frac{2}{\pi}tan^{-1}(nx)$ y $f(x) = sgn(x)$).

80. Defina: $\rho_i : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ como sigue:

$$\rho_1(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ 1 & \text{si } E \neq \varnothing \end{cases} \qquad \rho_2(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ +\infty & \text{si } E \neq \varnothing \end{cases}$$

$$\rho_3(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es acotado} \\ 1 & \text{si } E \text{ no es acotado} \end{cases} \qquad \rho_4(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ 1 & \text{si } E \text{ es acotado } (E \neq \varnothing) \\ +\infty & \text{si } E \text{ no es acotado} \end{cases}$$

$$\rho_5(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es finito numerable} \\ 1 & \text{si } E \text{ no es numerable} \end{cases} \qquad \rho_6(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es numerable} \\ +\infty & \text{si } E \text{ no es numerable} \end{cases}$$

i) ¿Cuál de las funciones ρ_i es medida exterior y cuál es σ-finita?

ii) Si ρ_i es medida exterior, identifique a $\mathcal{A}^{\rho_i}$. (Ver [Hi]).

81. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida y $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida exterior generada. Pruebe:

i) Para todo $E \in \mathcal{A}^*$ con $\mu^*(E) < +\infty$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $A = A(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ tal que $\mu^*(E \Delta A) < \varepsilon$.

ii) Inversamente, si $E \subset X$ es tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $A = \mathcal{A}(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ con $\mu^*(E \Delta A) < \varepsilon$, entonces $E \in \mathcal{A}^*$.

82. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida y $\overline{\mu} : \mathcal{A}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida generada. Sea $E \in \mathcal{A}^*$ entonces $\overline{\mu}(E) = 0$ si y sólo si existe $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tal que $E \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.

(Sugerencia: La parte fácil del lema de Borel-Cantelli (32) es útil).

83. Sea $N \subset [0, +\infty)$ tal que $\lambda^*(N) = 0$. Defina $\sqrt{N} = \{\sqrt{x} : x \in N\}$, $N^2 = \{x^2 : x \in N\}$ y $N + N = \{x + y : x, y \in N\}$. Pruebe:

i) $\lambda^*(\sqrt{N}) = 0$ y $\lambda^*(N^2) = 0$.
(Sugerencia: Suponga primero que $N \subset [0, A]$ para alguna $A > 0$. Ver la propiedad (N) de N.N. Luzin en [N] Vol. I, página 248).

ii) $C + C = [0, 2]$ donde C es el conjunto clásico de Cantor, por lo que el inciso anterior no se cumple con la "suma".

84. (Brunn-Mínkowski). Sean $E, F \subset \mathbb{R}$ no vacíos, $E + F$ denota el conjunto

$$\{x + y : x \in E, \text{ y } y \in F\}.$$

Pruebe que:

$$\lambda^*(E + F) \geq \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$

(Sugerencia: Basta suponer que $0 < \lambda^*(E), \lambda^*(F) < \infty$. Considere primero el caso en el que E y F son uniones finitas de intervalos acotados. Ver [Fe] pp. 277-278).

85. Sea $X = \mathbb{R}$, S = la σ-álgebra de Lebesgue y μ = la medida de Lebesgue sobre S. Pruebe que el espacio métrico asociado $(\mathcal{F}, d)$ (ver el ejercicio (34)) es separable.

(Sugerencia: Use el anterior inciso (i)).

86. (Cubiertas y núcleos medibles).

Hipótesis y notación como en el ejercicio (81).

a) Pruebe:

i) Para todo $B \subset X$ con $\mu^*(B) < +\infty$, existe $C \in S(\mathcal{A})$ tal que:

a) $B \subset C$

b) Si $D \subset C - B$ con $D \in S(\mathcal{A})$ entonces $\overline{\mu}(D) = 0$ (C se llama una <u>cubierta</u> <u>medible</u> para B) y además $\overline{\mu}(C) = \mu^*(B)$.

ii) Para todo $B \subset X$ con $\mu^*(B) < +\infty$, existe $E \in S(\mathcal{A})$ tal que

a) $E \subset B$

b) Si $F \subset B - E$ con $F \in S(\mathcal{A})$ entonces $\overline{\mu}(F) = 0$ (E se llama un núcleo medible para B).
(Sugerencia: Si C es una cubierta medible para B y C' una cubierta medible para $C - B$, tome $E = C - C'$).

iii) Pruebe que si C y C' son cubiertas medibles de B, entonces $\overline{\mu}(C \Delta C') = 0$. (Análogamente con núcleos medibles).

b) Suponga que μ es σ-finita y pruebe los incisos anteriores si $\mu^*(B) = +\infty$.

87. Hipótesis y notación como en el ejercicio (81). Para $B \subset X$ defina:

$$\mu_*(B) = \sup\{\overline{\mu}(F) : F \subset B, F \in S(\mathcal{A})\}$$

Pruebe:

i) $\mu_*(B) = \overline{\mu}(E)$ para todo E núcleo medible para B (compare con el anterior. inciso (i)).

ii) Si $\mu^*(B) < +\infty$, entonces $B \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \mu^*(B) = \mu_*(B)$. ($\mu_*$ se llama la medida interior).

88. Sean $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida σ-finita, μ^* y $\mu_* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ las medidas exterior e interior generadas por μ y $(B_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Pruebe:

i) Si $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu^*(B_n).$$

ii) Si $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ y $\mu^*(B_m) < +\infty$ para alguna m, entonces

$$\mu_*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\downarrow\infty} \mu_*(B_n).$$

iii) Si $B_n \cap B_m = \phi (n \neq m)$, entonces

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(B_n) \quad (\sigma\text{-sobre-aditividad}).$$

(Sugerencia: Use cubiertas y núcleos medibles).

89. Hipótesis y notación como en el ejercicio (81). Sea $A \in \mathcal{A}^*$ con $\overline{\mu}(A) < +\infty$ y sea $B \subset A$. Pruebe

$$B \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \overline{\mu}(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A - B).$$

(Sugerencia: Use el ejercicio (87) inciso (ii)).

90. Pruebe que si μ es σ-finita, entonces la compleción de $S(\mathcal{A})$ con respecto a $\mu^*|_{S(\mathcal{A})}$ coincide con $\mathcal{A}^*$ (ver el ejercicio (36)).

91. Suponga que $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es σ-finita. Pruebe

i) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A}^*$-medible si y sólo si $f = g$ (c.d. rel. μ) con $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alguna función $S(\mathcal{A})$-medible.[16]
(Sugerencia: Para cada $r \in \mathbb{Q}$ sea $E_r = \{x \in X : f(x) > r\}$. Por el ejercicio anterior $E_r = A_r \cup M_r$ con $A_r \in S(\mathcal{A})$. $M_r \subset N_r \in S(\mathcal{A})$ y $\mu(N_r) = 0$.
Sea $N = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r$ y defina $g(x) = f(x)$ si $x \notin N$ y $g(x) = 0$ si $x \in N$.
Inversamente, si $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = (\{x \in X : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in N : f(x > \alpha)\})$$
$$-\{x \in N : f(x) \leq \alpha\}).$$

ii) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable entonces f es Lebesgue-medible y

$$R\int_a^b f\,dt = \int_{[a,b]} f\,d\overline{\lambda} \quad \text{(ver el ejercicio (55)).}$$

iii) Pruebe el ejercicio (57), pero sin suponer que f es Borel-medible.

[16] En particular una función es Lebesgue-medible si y sólo si es igual casi donde quiera a una función Borel-medible.

92. Hipótesis y notación como en el ejercicio (34). Pruebe que $(\widetilde{\mathcal{F}}, d)$ es conexo.

(Sugerencia: Para cada $[A] \in \widetilde{\mathcal{F}}$ fija, defina $\gamma : [0, +\infty) \to \widetilde{\mathcal{F}}$ como sigue:

$$\gamma(s) = [A \cap (-s, s)]$$

Pruebe que γ es continua, $\gamma(0) = [\emptyset]$ y $d(\gamma(s), [A]) \to 0$ $(s \to +\infty)$. Use la conexidad de $[0, +\infty)$. Pruebe que de hecho $(\widetilde{\mathcal{F}}, d)$ es conectable por trayectorias).

93. Pruebe que $(\widetilde{\mathcal{F}}, d)$ podría no ser compacto aún si $\mu(X) < +\infty$. (ver el ejercicio (34)).

(Sugerencia: Sea $X = [0, 1]$, $S = \mathbb{B}_{[0,1]}$ y $\mu =$ medida de Lebesgue. Considere

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right] \quad (n \geq 1)$$

y pruebe que $d([A_n], [A_m]) = \frac{1}{2} (n \neq m)$. Más generalmente, pruebe que puede no ser localmente compacto).

94. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la transformación afín $T(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$. Observe que si $T_1(x) = x + \beta$, $T_2(x) = -x$ y $T_3(x) = |\alpha| x$, entonces $T = T_1 \circ T_3$ si $\alpha > 0$ ó $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ si $\alpha < 0$. Pruebe:

i) $T_i(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ $i = 1, 2, 3$. En general, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo entonces $h(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

ii) Para toda $E \subset \mathbb{R}$: $\lambda^*(T_i(E)) = \lambda^*(E)$ $i = 1, 2$ y $\lambda^*(T_3(E)) = |\alpha| \lambda^*(E)$.

iii) $T_i(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ $i = 1, 2, 3$.[17]

iv) Para toda $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$: $\overline{\lambda}(T(E)) = |\alpha| \overline{\lambda}(E)$.

95. Hipótesis y notación como en el ejercicio anterior. Pruebe que si $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda})$, entonces

$$f \circ T \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda}), \quad \text{y} \quad \int_E f \circ T \, d\overline{\lambda} = |\alpha|^{-1} \int_{T(E)} f \, d\overline{\lambda}.$$

[17] Existen homeomorfismos tales que $h(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) \neq \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (ver el ejercicio (105)).

96. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ una función S-medible. Sea $\nu : \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B))$ para toda $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Pruebe que ν es una medida y que $\int_B f \, d\nu = \int_{g^{-1}(B)} (f \circ g) \, d\mu$ para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea Borel medible y pertenezca a $\mathcal{L}_1(\nu)$.

(Sugerencia: Empiece con f que sea $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-simple y aproxime).

97. (Teorema de H. Steinhaus).

Sean $A, B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ dados con $\overline{\lambda}(A) < +\infty$ y $\overline{\lambda}(B) < +\infty$. Defina $\overline{\lambda}_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\overline{\lambda}_{A,B}(x) = \overline{\lambda}(A \cap (B + x))$$

en donde $B + x = \{b + x : b \in B\}$. Pruebe que $\overline{\lambda}_{A,B}$ es continua y concluya que si $\overline{\lambda}(A) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\overline{\lambda}(A \cap (A + x)) > 0$ si $|x| < \delta$ y que $A \ominus A = \{a - a' : a, a' \in A\}$ contiene al intervalo abierto $(-\delta, \delta)$.

(Sugerencia: Empiece con A y B igual a intervalos, luego con A y B igual a unión finita disjunta de intervalos y por aproximación (ver el ejercicio (81)) trate el caso general).

98. Suponga que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea aditiva (i.e. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$) y Lebesgue medible, entonces $f(x) = f(1)x$ para toda $x \in \mathbb{R}$

(Sugerencia: Pruebe que basta probar que f es acotada en una vecindad de $x_0 = 0$. Halle $M > 0$ de tal modo que $\overline{\lambda}(A_M) > 0$ donde $A_M = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$ y aplique el teorema de Steinhaus ejercicio (97) a $A_M \ominus A_M$). (Ver [St]).

99. Denote por $x = .x_1 x_2 \ldots$ la expansión decimal (sin cola de nueves) de $x \in [0, 1)$. Sean

$$A_1 = \{x \in [0, 1) : x_i \neq 7 \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\} \quad \text{y}$$

$$A_2 = \{x \in [0, 1) : \text{ si } x_i = 3 \text{ entonces existe } i < j \text{ tal que } x_i = 2\}.$$

Pruebe que A_1 y A_2 pertenecen a $\mathbb{B}_{[0,1)}$ y halle $\overline{\lambda}(A_i)$ $(i = 1, 2)$

(Solución: $\overline{\lambda}(A_1) = 0$, $\overline{\lambda}(A_2) = \frac{1}{2}$).

100. Sea $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$. Suponga que $\overline{\lambda}(E\Delta(E+x)) = 0$ para todo x en algún subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Pruebe que $\overline{\lambda}(E) = 0$ ó $\overline{\lambda}(\mathbb{R} - E) = 0$.

(Sugerencia: El ejercicio 97 es útil).

101. i) Para toda $\alpha \in (0,1)$ construya un boreliano $C_\alpha \subset [0,1]$ que sea
   a) Denso en ninguna parte.
   b) Perfecto.
   c) $\overline{\lambda}(C_\alpha) = \alpha$
   (Sugerencia: Imite la construcción del conjunto ternario de Cantor, pero omitiendo subintervalos abiertos más pequeños).

   ii) Pruebe que $[0,1]$ contiene un subconjunto P de primera categoría tal que $P \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y $\overline{\lambda}([0,1] - P) = 0$ (i.e. P es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte).

   iii) Generalice el inciso anterior como sigue: para toda $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, existe $P \subset E$, $P \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ de primera categoría tal que $\overline{\lambda}(E - P) = 0$.

   iv) Concluya que todo $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ puede escribirse como: $E = P \cup N$ con P y N en $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, ajenos entre sí y tales que P es de primera categoría y $\overline{\lambda}(N) = 0$.

102. i) Si $V \subset [0,1]$ es un conjunto no-medible de Vitali y $F \subset V$, $F \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ entonces $\overline{\lambda}(F) = 0$.
   (Sugerencia: Si $F_i = F + r_i$, $r_i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, entonces $F \subset \bigcup_{r_i} F_i$ (disjuntos); o bien, pruebe que $V \ominus V$ no puede contener intervalos y use el ejercicio (97)).

   ii) Si $\lambda^*(E) > 0$, entonces existe $M \subset E$ con $M \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (Teo. de H. Rademacher, 1916).
   (Sugerencia: Si $E \subset (0,1)$ considere $M_i = (V + r_i) \cap E \quad r_i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Si $E \not\subset (0,1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(E \cap (-n,n)) > 0$. Halle una transformación afín que lleve $(-n,n)$ en $(0,1)$, use el ejercicio (94) y el caso anterior).

103. En 1908 F. Bernstein construyó un subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades: si $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado y no-numerable, entonces: $C \cap B \neq \phi$ y $C - B \neq \phi$. Pruebe:

   i) $B \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$.
   (Sugerencia: Si $B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, entonces $\overline{\lambda}(B) = \sup\{\overline{\lambda}(C) : C \subset B,\ C$ cerrado$\}$).

   ii) Pruebe el inciso (ii) del ejercicio anterior usando a B. (Ver [O] teoremas 5.3 y 5.4).

104. La función "escalera" de Cantor. (También conocida como la función singular de Lebesgue).

Para cada $x \in [0,1]$, sea $0.\alpha_1\alpha_2\ldots$ su expansión ternaria (i.e. $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$ con $\alpha_i = 0, 1$ ó 2). Sea $N = N(x) \in \mathbb{N}$ el primer índice para el que $\alpha_N = 1$. (Si no hay tal N, sea $N = +\infty$). Defina $\Psi : [0,1] \to [0,1]$ la llamada escalera de Cantor como sigue:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^N} \qquad \text{con } \beta_i = \frac{\alpha_i}{2}$$

Sea C el conjunto ternario de Cantor. Pruebe que:

   i) Ψ esta bien definida (i.e. $\Psi(x)$ no depende de las posibles expansiones de x) y que Ψ es no decreciente.

   ii) Ψ es continua, $\Psi'(t) = 0$ para toda $t \notin C$ y $\int_0^1 \Psi(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

   iii) $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por $h(x) = \frac{1}{2}(x + \Psi(x))$ es un homeomorfismo.

   iv) $\overline{\lambda}(h([0,1]) - C) = \frac{1}{2} = \overline{\lambda}(h(C))$.
   (Sugerencia: Pruebe que $\Psi([0,1] - C)$ es un conjunto numerable, con cada uno de los valores tomados en cada intervalo abierto del complemento de C. Note también que $h(C)$ y $h([0,1] - C) \in \mathbb{B}_{[0,1]}$ y son ajenos).
   (Observación: $h(C)$ es denso en ninguna parte y de medida positiva).

105. Pruebe:[18]

[18] Puede probarse que $\#(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0}$ y $\#(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) = 2^{c}$.

i) Existen homeomorfismos tales que $h(\mathcal{A}^*_{[0,1]}) \neq \mathcal{A}^*_{[0,1]}$.
(Sugerencia: Sea h como en el ejercicio anterior. Halle por el ejercicio (102) inciso (ii) un subconjunto no-medible M contenido en $h(C)$).

ii) $\mathbb{B}_{[0,1]} \subsetneq \mathcal{A}^*_{[0,1]}$.
(Sugerencia: Considere $h^{-1}(M)$, con h y M los sugeridos en (i)).

106. (Desigualdad de P. Tchebyshev).
Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función no-decreciente y mayor que cero en $(0, +\infty)$. Si $f \in M(X, S)$ es tal que $\varphi \circ |f| \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces para toda $\alpha > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int \varphi \circ |f| \, d\mu$$

107. Sea (X, S, μ) un espacio de medida finita. Para cada $f \in M(X, S)$ defina

$$r(f) = \int \frac{|f|}{1 + |f|} \, d\mu.$$

Pruebe:

i) $r(f) < +\infty$ y $d(f, g) = r(f - g)$ define una semi-métrica en $M(X, S)$.

ii) $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to +\infty)$ si y sólo si $f_n \underset{\mu}{\to} f$ $(n \to +\infty)$.
(Sugerencia: $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ satisface las condiciones del ejercicio anterior).

iii) Si (f_n) es una sucesión d-Cauchy en $M(X, S)$, entonces existe $f \in M(X, S)$ tal que $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

108. Pruebe que el lema de Fatou continúa siendo válido si "convergencia c.d." se reemplaza por "convergencia en medida", en el siguiente sentido: Si (f_n) es una sucesión de funciones en $M^+(X, S)$ y $f_n \underset{\mu}{\to} f$, entonces:

$$\int f \, d\mu \leq \varliminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

Enuncie el análogo al teorema de convergencia dominada y pruébelo.

109. Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Pruebe: $f_n \to f$ c.u. (casi uniformemente) si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ fija, $\mu(B_n(\varepsilon)) \to 0$ $(n \to +\infty)$ con

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geq n} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

110. i) Sea $X = [0, \pi]$, $S = \mathbb{B}_{[0,\pi]}$ y $\mu =$ la medida de Lebesgue. Defina $f_n(x) = \frac{n sen(x)}{1+n^2 sen(x)}$. Dada $\varepsilon > 0$. Halle explícitamente un conjunto de Egorov E_ε con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente en $X - E_\varepsilon$.

ii) Muestre con ejemplos que la conclusión del teorema de Egorov puede fallar si $\mu(X) = +\infty$.

111. Pruebe el teorema de N.N. Luzin (1913).

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $E = E(\varepsilon)$ abierto con $\overline{\lambda}(E) < \varepsilon$ y tal que $f|_{\mathbb{R}-E} : \mathbb{R} - E \to \mathbb{R}$ es continua.
(Sugerencia: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ dada. Como $f^{-1}(\mathcal{U}_i) \in A^*_{\mathbb{R}}$, existen un cerrado F_i y un abierto G_i tales que

$$F_i \subset F^{-1}(\mathcal{U}_i) \subset G_i \quad \text{y} \quad \overline{\lambda}(G_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{2^{\varepsilon}} \quad (i \in N)$$

Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - F_i)$. Inversamente sea E_i abierto con $\overline{\lambda}(E_i) < \frac{1}{i}$ $(i \in \mathbb{N})$ y con $f_i = f|_{\mathbb{R}-E_i}$, continua. Si $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces $\overline{\lambda}(E) = 0$ y $f^{-1}(\mathcal{U}) - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(\mathcal{U})$ para toda $U \subset \mathbb{R}$ abierto).

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que

$$\overline{\lambda}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon$$

(Sugerencia: Use el inciso anterior y el teorema de extensión de H. Tietze (Ver [H-S]). Inversamente, sean $E_n = \left\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g_{\frac{1}{2^n}}(x)\right\}$ y $E = \varlimsup_{n \to \infty} E_n$. Pruebe que $f = \varlimsup_{n \to \infty} g_{\frac{1}{2^n}}$ en $\mathbb{R} - E$).

112. Pruebe el teorema de M. Fréchet; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si existe una sucesión de funciones continuas $(f_n)_1^\infty$ tal que $f_n \to f$ (c.d. rel. λ) $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

(Sugerencia: Ver el anterior).

113. i) Pruebe que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

es Borel-medible, pero no existe una función continua $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ (c.d. rel. λ).

ii) Halle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel-medible y acotada tal que $\|f - g\|_1 > 0$ para toda $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.

114. Sean $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda}), p \in [1, +\infty)$, y $\varepsilon > 0$ dadas:

i) Pruebe que existe $A = A(\varepsilon) > 0$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $g(x) = 0$ para todo $x \notin [-A, A]$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

ii) Pruebe que existe g escalonada (o lineal por tramos o bien diferenciable) tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

115. Sea $\mu : \mathbb{B}_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ una medida multiplicativa i.e.

$$\int fg \, d\mu = \left(\int f \, d\mu\right)\left(\int g \, d\mu\right)$$

para todas $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas. Identifique a μ.

116. Sean $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$ y $p \in [1, +\infty)$ fijas. Defina $f_t(x) = f(t+x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f \in \mathcal{L}_p(\overline{\lambda})$ y que $\lim_{t \to 0} \|f_t - f\|_p = 0$. Más aún, pruebe que la función $\mathbb{R} \to \mathcal{L}_p(\overline{\lambda})$ dada por $t \mapsto f_t$ es uniformemente continua.

(Sugerencia: Empiece suponiendo que f es continua e igual a cero en $\mathbb{R} - [-A, A]$ $(A > 0)$. Use el ejercicio (114) inciso (i)).

117. Pruebe el lema de Riemann-Lebesgue: Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \begin{Bmatrix} cos(nx) \\ sen(nx) \end{Bmatrix} d\overline{\lambda} = 0$$

El mismo resultado se tiene si $n \to \infty$, con $n \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

(Sugerencia: Empiece suponiendo que f es escalonada e igual a cero en $\mathbb{R} - [-A, A]$ $(A > 0)$). Use el ejercicio (114).

118. Sea $X = (0, +\infty)$, $S = \mathcal{A}^*_{(0,\infty)}$ y $\mu = \overline{\lambda}$. Para $f \in \mathcal{L}_p(X, S, \mu)$ $(p \in (1, +\infty))$, defina $F : X \to \mathbb{R}$ poniendo: $F(x) = \frac{1}{x} \int_{(0,x)} f \, d\overline{\lambda}$.

Pruebe la desigualdad de G. G. Hardy:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

La desigualdad ocurre si y sólo si $f = 0$ (c.d. rel. $\overline{\lambda}$).

(Sugerencia: Suponga que f es continua, $f \geq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > A$ $(A > 0)$. Integrando por partes obtenga:

$$\int_0^\infty F^p(x) \, dx = -p \int_0^\infty F^{p-1}(x) x F'(x) \, dx < +\infty$$

Observe que $xF' = f - F$; sustituya en la integral y aplique la desigualdad de Hölder a F^{p-1} y f. Concluya el caso general con ayuda del ejercicio (114) inciso (i)).

119. Una familia de funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{L}_1(\mu)$ se llama uniformemente integrable si

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geq c\}} |f_i| \, d\mu = 0$$

Pruebe:

i) Si I es finito o si existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que $|f_i| \leq g$ para toda $i \in I$, entonces $\{f_i\}_{i \in I}$ es uniformemente integrable.

ii) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(p \in [1, +\infty)$ fija) tal que $f \xrightarrow[\mathcal{L}_p]{} f$, entonces $\{|f_n|^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

(Sugerencia: Para toda $E \in S$ se tiene

$$\int_E |f_n|^p d\mu \leq 2^p \int_E |f_n - f|^p d\mu + 2^p \int_E |f|^p d\mu$$

y pruebe que dadas $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ entonces $\int_E |g|^p d\mu < \varepsilon$).

iii) Dé un ejemplo de una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_1(\mu)$ que no esté dominada en valor absoluto por una función en $\mathcal{L}_1^+(\mu)$, pero que sea uniformemente integrable.

(Sugerencia: Sean $X = [0,1]$, $S = \mathbb{B}_{[0,1]}$, μ = medida de Lebesgue y $f_n = \frac{n}{\log n}\chi_{[0,1/n]}$ $n \geq 2$. Note que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$).

120. Pruebe el siguiente resultado de G. Vitali:

Sean (X, S, μ) un espacio de medida finita y $p \in [1, +\infty)$ fijos. Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_p(\mu)$ tal que $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ con $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable entonces $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

(Sugerencia: Pruebe que $(g = |f_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. Por el teorema de Riesz-Weyl existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ (c.d. rel. μ) y en medida).

121. Sean (X, S) un espacio de medida y $\rho : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Pruebe:

i) Para todo $E \in S$:

$$\rho^+(E) = \sup\{\rho(F) : F \subset E, F \in S\} \quad \text{y}$$

$$\rho^-(E) = -\inf\{\rho(F) : F \subset E, F \in S\}.$$

Además $-\rho^-(E) \leq \rho(E) \leq \rho^+(E)$. Concluya que $|\rho(E)| \leq |\rho|(E)$.

ii) Si ν es otra medida con signo y no toma un valor extendido diferente al de ρ, entonces:

$$|\nu + \rho| \leq |\nu| + |\rho|$$

122. Sea ρ una medida con signo σ-finita sobre (X, S). Pruebe:[19]

[19] En (ii) se ha definido $\int_E f\, d\rho$ como $\int_E f\, d\rho^+ - \int_E f\, d\rho^-$. Observe que $f \in \mathcal{L}_1(|\rho|)$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\rho^+)$ y $f \in \mathcal{L}_1(\rho^-)$.

i) $|\rho|(E) = \max\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho(F_i) : \{F_i\}_1^{\infty} \text{ partición numerable de } E, F_i \in S\right\}$

ii) $|\rho|(E) = \sup\left\{\int_E f\, d\rho : f \in \mathcal{L}_1(|\rho|), |f| \leq 1\right\}$ para toda $E \in S$ fijo. Si $|\rho|(E) < +\infty$, entonces en (ii) *sup* puede reemplazarse por *max*.

123. Sean μ y ν medidas con signo sobre (X, S). Pruebe que $|\nu| \perp |\mu|$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $F = F_\varepsilon \in S$ con $|\nu|(F) < \varepsilon$ y $|\mu|(X - F) < \varepsilon$.

124. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre (X, S), alguna de ellas finitas, y sea $\rho = \mu_1 - \mu_2$. Pruebe:

$$\rho^+ = \mu_1 \quad \text{y} \quad \rho^- = \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 \perp \mu_2$$

125. Sea (X, S) un espacio medible fijo. Denotaremos por $M(S)$ el conjunto de medidas con signo finitas en (X, S). Pruebe que $M(S)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones: $(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$, $(\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E)$, $E \in S$, y con la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

126. Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Para $f_i \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $(i = 1, 2)$ fijas, defina dos medidas con signo finitas como sigue:

$$\rho_i(\bullet) = \int_{(\bullet)} f_i\, d\mu \qquad i = 1, 2.$$

Pruebe:

$\mu(\{x \in X : f_1(x) = 0\} \triangle \{x \in X : f_2(x) = 0\}) = 0$, entonces $\rho_1 \equiv \rho_2$.

(Sugerencia: Observe que $|\rho_i|(\bullet) = \int_{(\bullet)} |f_i|\, d\mu$ y pruebe la afirmación para $|\rho_i|$ $(i = 1, 2)$).

127. Hipótesis y notación como en el anterior. Si $\rho_1 \equiv \rho_2$ halle explícitamente la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$. ¿Será cierto que

$\mu(\{x \in X : f_1(x) = 0\} \triangle \{x \in X : f_2(x) \neq 0\}) = 0$, entonces $\rho_1 \perp \rho_2$?

128. Sean μ, ν medidas con signo σ-finitas sobre (X, S) tales que: $\nu \equiv \mu$. Pruebe:

i) $\nu\Big(\{x \in X : \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}\Big) = 0$.

ii) Si $f \in \mathcal{L}_1(|\nu|)$ y $\rho(E) = \int_E f\, d\nu$ $(E \in S)$, entonces $\rho \ll \mu$ y $\frac{d\rho}{d\mu} = f\frac{d\nu}{d\mu}$ (c.d. rel. μ).

129. Sean (X, S, μ) un espacio de medida finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ dados. Sea $\rho : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(E) = \int_E f\, d\mu \qquad (E \in S).$$

Halle la descomposición de Lebesgue $\mu = \mu_0 + \mu_1$ de μ con respecto a ρ, con $\mu_0 \perp \rho$ y $\mu_1 \ll \rho$. Describa a $\frac{d\mu_1}{d\rho}$ en términos de f. ¿Qué condición debe satisfacer f para que $\rho \equiv \mu$?

130. Sea $\mu : \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ una medida finita. Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniendo $g(x) = \mu((-\infty, x])$ $(x \in \mathbb{R})$. Pruebe que es no-decreciente, continua por la derecha, $\mu((a, b]) = g(b) - g(a)$ y $\mu(\mathbb{R}) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x)$ (g se llama la distribución de μ). Inversamente, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no-decreciente, continua por la derecha.

Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ el álgebra del ejercicio (7), defina $\lambda_g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ extendiendo aditivamente los siguientes valores:

$$\lambda_g((a, b]) = g(b) - g(a), \qquad \lambda_g((-\infty, b] = g(b) - \lim_{x \downarrow -\infty} g(x)$$

$$\lambda_g((a, +\infty)) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x) - g(a), \quad \lambda_g((-\infty, +\infty)) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x) - \lim_{x \downarrow -\infty} g(x)$$

Pruebe que existe una única medida $\overline{\lambda}_g$ definida en una σ-álgebra completa $\mathcal{A}_g^*$ que contiene a $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. ($\overline{\lambda}_g : \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ se llama medida de Lebesgue-Stieltjes generada por g).

(Sugerencia: Use el teorema de extensión de Hahn-Carathéodory. La continuidad por la derecha de g es indispensable para probar que λ_g es una casi medida. Para adaptar la prueba del teorema 7.14, dada $\varepsilon > 0$ elija $\delta_n > 0$ de tal modo que $g(b_n + \delta_n) - g(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ (posible pues $g(b_n^+) = g(b_n)$) y considere la cubierta abierta $G = \{I_n\}$ de $[a + \varepsilon, b]$ donde $I_n = (a_n, b_n + \delta_n)$ para cada n y luego use que $g(a^+) = g(a)$).

(Observación: $\overline{\lambda}_g$ es σ-finita y $\overline{\lambda}_g$ es finita si y sólo si g es acotada. Además $\overline{\lambda}_g(\{x\}) = 0$ si y sólo si g es continua en x).

131. Sea $\overline{\lambda}_g : \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por g (como en el ejercicio anterior). Pruebe:[20]

i) $\overline{\lambda}_g \ll \overline{\lambda}$ (medida de Lebesgue) si y sólo si para toda $a < b \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$ tal que si $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ denota cualquier colección numerable disjunta se subintervalos abiertos contenidos en $[a, b]$ tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) < \delta$ entonces:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (g(b_i) - g(a_i)) < \varepsilon.$$

ii) Si $\overline{\lambda}_g \ll \overline{\lambda}$, entonces: $g' = \frac{d\lambda_g}{d\lambda}$ (c.d. rel. λ).

(Sugerencia: Si g es no-decreciente, entonces g' existe (c.d. rel. $\overline{\lambda}$) y es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ (Teorema de Lebesgue). Recuerde la siguiente propiedad de las integrales de Riemann-Stieltjes:

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f g'\, dt, \qquad \text{para toda } f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua.})$$

132. Sea $\Psi : [0, 1] \to [0, 1]$ la función escalera de Cantor (ejercicio (104)).

i) Pruebe que $\Psi\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{2}\Psi(x)$ y $\Psi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Psi(x)$ $(x \in [0, 1])$.

ii) Extienda Ψ a todo $\mathbb{R}$ poniendo $\Psi(x) = 0$ si $x < 0$ y $\Psi(x) = 1$ si $x > 1$ y pruebe que si $\overline{\lambda}_\Psi$ es la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por Ψ entonces

[20] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad anterior se llama absolutamente continua (G. Vitali, 1905).

a) $\int\limits_{[0,1]} e^{ax}\, d\overline{\lambda}_\Psi = e^{a/2}\prod\limits_{k=1}^{\infty} cosh\left(\frac{a}{3^k}\right)$ (coseno hiperbólico).

b) $\int\limits_{[0,1]} sen(\pi x)\, d\overline{\lambda}_\Psi = \prod\limits_{k=1}^{\infty} cos\left(\frac{a}{3^k}\right)$ y $\int\limits_{[0,1]} cos(\pi x)\, d\overline{\lambda}_\Psi = 0$.

(Sugerencia: Denote por $p(a)$ a la integral en (a). Observe que

$$\overline{\lambda}_\Psi\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)=0.$$

por lo que basta considerar a la integral sobre $[0,\frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3},1]$ y use el inciso (i) para obtener $p(a)=e^{a/3}cosh(a/3)p(a/3)$. Procediendo de manera inductiva obtenga

$$p(a)=e^{a/3}e^{a/3^2}\cdots e^{a/3^k}\prod_{j=1}^{k} cosh\left(\frac{a}{3^j}\right)p\left(\frac{a}{3^k}\right)$$

Justifique el hecho de que $p(a)\to 1$ si $a\to 0$. (ii) Se sigue de (i) si consideran valores particulares para $a\in\mathbb{C}$).

133. Pruebe que $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}=\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}\otimes\mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}$.

134. i) Sea (X,d) un espacio métrico separable. Pruebe que: $D=\{(x,x): x\in X\}$, la diagonal de $X\times X$, pertenece a $\mathbb{B}_X\otimes\mathbb{B}_X$.

ii) Sea X no numerable y $S=\{A\subset X : A$ ó $X-A$ es finito o numerable$\}$. Pruebe que $D\notin S\otimes S$.

(Sugerencia: Si $D\in S\otimes S$, entonces $D\in S(\mathbb{E}_0)$, para alguna subfamilia numerable $\mathbb{E}_0\subset S\otimes S$ (ver el ejercicio (12)). Por definición de $S,\mathbb{E}_0$ puede tomarse igual a $\{(x_m,x_n): m,n\in\mathbb{N}\}$ para algún conjunto numerable $\{x_n\}\subset X$. Obtenga de esto una contradicción).

135. Enuncie y pruebe los resultados análogos a los ejercicios (94) y (95) para transformaciones afines $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

(Sugerencia: Sea $T(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{b}$, si $det(A)\neq 0$, entonces A corresponde a una matriz que puede ser llevada a la matriz identidad mediante una composición de transformaciones elementales aplicadas a sus renglones. Examine el efecto de éstas sobre celdas n-dimensionales).

136. Enuncie y pruebe los resultados análogos a los incisos del ejercicio (100) para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$.

137. Imitando la construcción de G. Vitali, obtenga un subconjunto no medible contenido en $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ (n factores).

138. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $\nu: P(\mathbb{N})\to\overline{\mathbb{R}}$ la medida de conteo. Pruebe:

i) $E\in S\otimes P(\mathbb{N})\Leftrightarrow E^n\in S$, para toda $n\in\mathbb{N}$.

ii) $\mu\otimes\nu(E)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E^n)$ $(E\in S\otimes P(\mathbb{N}))$.

iii) $f: X\times\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}$ es $S\otimes P(\mathbb{N})$-medible si y sólo si f^n es S-medible para todo $n\in\mathbb{N}$. (f^n denota la n-sección de f).

iv) $f\in\mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int|f^n|d\mu<+\infty$, en cuyo caso:

$$\int\limits_{X\times\mathbb{N}} f\, d(\mu\otimes\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}\int f^n\, d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}f^n\, d\mu$$

Enuncie cada uno de los incisos anteriores para el caso en el que $X=\mathbb{N}$, $S=P(\mathbb{N})$ y $\mu=\nu$.

139. Sea $E\subset[0,1]\times[0,1]$ medible. Supóngase que: $\overline{\lambda}(E^y)\geq\frac{1}{2}$ para toda $y\in[0,1]$. Sea $F=\{x\in[0,1]:\overline{\lambda}(E_x)\geq\frac{1}{4}\}$. Pruebe:

i) $F\in\mathcal{A}^*_{[0,1]}$.

ii) $\overline{\lambda}(F)\geq\frac{1}{3}$.

140. Sea $A\subset[0,\infty)$ Lebesgue medible y sea

$$C_A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x^2+y^2}\in A\}$$

i) Pruebe que C_A es Lebesgue medible también.
(Sugerencia: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es continua por lo que si A es abierto en $\mathbb{R}$, entonces $C_A=F^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
Use el ejercicio (19) y pruebe también que $(\overline{\lambda}\otimes\overline{\lambda})(C_N)=0$ si $\lambda(N)=0$).

ii) Pruebe que $\overline{\lambda}^{(2)}(C_A) = 2\pi \int_A t\, d\lambda(t)$.
(Sugerencia: Empiece con A igual a una unión finita y disjunta de intervalos).

iii) Generalice i) a otras funciones $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

141. Sean (X, S, μ) un espacio de medida σ-finito y $f \in M^+(X, S)$ dados. Defina

$$O_*(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}$$

el conjunto ordenado inferior de f. Pruebe:

i) $O_*(f)$ es $S \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible.

ii) $\int f\, d\mu = \mu \otimes \lambda(O_*(f))$. (Por lo tanto la integral es el "área bajo la curva").

iii) $\gamma(f) = \{(x,t) : t = f(x)\}$ es $S \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible y $\mu \otimes \nu(\gamma(f)) = 0$.

(Sugerencia: En (i) y (ii) empiece con una función S-simple y aproxime. Para (iii) considere $\{(x,t) : 0 \leq t \leq f(x)\}$).

142. Sean (X, S, μ) un espacio de medida σ-finito, $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ funciones S-medibles y acotadas con $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ para toda $x \in X$ y

$$E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)\}.$$

Pruebe:

i) $E \in S \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.
(Sugerencia: Aproxime φ_1 y φ_2 con funciones S-simples, acotadas s y s' con: $s \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq s'$).

ii) Si $F : E \to \mathbb{R}$ es $S \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible y $F \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \overline{\lambda})$, entonces

$$\int_E F(x,t)\, d(\mu \otimes \overline{\lambda}) = \int_{[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]} \int_{\mathbb{R}} F(x,t)\, d\overline{\lambda} d\mu$$

(Sugerencia: Considere las x-secciones de χ_F).

iii) Sea $c \in (0,1)$ fijo. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1-y}{x-y}\right)^c & \text{si } 0 \leq y < x,\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pruebe que $F \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})$ y halle $\int F(x,y)\, d(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})$.
(Sugerencia: Una de las integrales iteradas es más sencilla. Solución $\frac{1}{2(1-c)}$).

143. Para toda $E \subset \mathbb{R}$ defina $\gamma(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$. Pruebe:

i) Si $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ entonces $\gamma(E) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$.
(Sugerencia: Note que $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $D(x,y) = x - y$ es una función continua).

ii) Si $\overline{\lambda}(E) = 0$, entonces $\gamma(E) \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}}$.
(Sugerencia: Pruebe que $(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})^*(\gamma(E)) = 0$).

iii) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$-medible, entonces $F(x,y) = f(x-y)$ es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}^2}$-medible.
(Sugerencia: Use el ejercicio (91) inciso (i) y los incisos anteriores).

iv) Si $A, B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ son tales que $\overline{\lambda}(A) < +\infty$ y $\overline{\lambda}(B) < +\infty$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\lambda}(A \cap (B + x))dx = \overline{\lambda}(A)\overline{\lambda}(B) \quad \text{(Ver el ejercicio (97))}.$$

v) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$-medibles e integrables, entonces la función $f * g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida mediante la fórmula:[21]

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\overline{\lambda}(y) \quad (x \in \mathbb{R})$$

es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$-medible, es finita (c.d. rel. $\overline{\lambda}$) y $\int (f * g) d\overline{\lambda} = \left(\int f\, d\overline{\lambda}\right) \left(\int g\, d\overline{\lambda}\right)$.
Además $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

[21] La función $f * g$ se llama convolución de f con g.

144. Compruebe las siguientes propiedades de la convolución:

i) $f*g=g*f$.

ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$.

iii) $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$.

iv) $f_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} f$ y $g_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} g$ $(n\to+\infty)$ entonces $f_n*g_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} f*g$

(Sugerencia: En (i), (ii) y (iii) use el teorema de Fubini).

145. Enuncie y pruebe los resultados análogos a los dos ejercicios anteriores para convoluciones de sucesiones dobles de números reales.

(Sugerencia: En este caso se considera $(\mathbb{Z},P(\mathbb{Z}),\text{conteo})$ en lugar de $(\mathbb{R},\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}},\overline{\lambda})$ y para $x,y:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ se define $x*y(n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{n-m}y_m$).

146. (El teorema de la convolución de W.H. Young).

Sean $p,q\in[1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$ y sea $r\in[1,+\infty)$ tal que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$. Pruebe:

i) Si $f\in\mathcal{L}_p(\lambda)$ y $g\in\mathcal{L}_p(\overline{\lambda})$ entonces

$$(f*g)(x)=\int f(t)g(x-t)\,d\overline{\lambda}(t)\in\mathcal{L}_r(\lambda).$$

ii) $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$.
(Sugerencia: Si $f,g\geq 0$ y p,q y r son finitos, escriba

$$(f*g)(x)=\int f(t)^{p/r}f(t)^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}g(x-t)^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\,d\overline{\lambda}(t)$$

y use la desigualdad de Hölder para tres funciones con exponentes r,p_1 y p_2 donde: $1/p_1=1/p-1/r$ y $1/p_2=1/p-1/r$. Ver ejercicio (61)).

147. Sea $M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ como en el ejercicio (125). Para cada $B\in\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ definimos

$$\tilde{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\in B\}.$$

Sean $\mu,\nu\in M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ definimos su convolución $\mu*\nu:\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$(\mu*\nu)(B)=\mu\otimes\nu(\widetilde{B}).$$

Pruebe:

i) $\mu*\nu\in M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ y $\|\mu*\nu\|\leq\|\mu\|\|\nu\|$.

ii) $\mu*\nu$ es la única medida de $\rho\in M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ que satisface:

$$\int f\,d\rho=\int\int f(x+y)\,d\mu(x)d\mu(y)$$

para toda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$.

(Sugerencia: Ver el ejercicio (114)).

iii) La convolución $*$ es conmutativa, asociativa y distribuye la suma. (Sugerencia: Use el inciso anterior).

148. Hipótesis y notación como en el inciso anterior. Pruebe:

i) No existe $\delta\in M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ tal que $\mu*\delta=\mu$ para toda $\mu\in M(\mathbb{B}_{\mathbb{R}})$.

ii) Si $\mu\ll\overline{\lambda}$ entonces $\mu*\nu\ll\overline{\lambda}$ y $\frac{d(\mu*\nu)}{d\overline{\lambda}}=\left(\frac{d\mu}{d\overline{\lambda}}\right)*\left(\frac{d\nu}{d\overline{\lambda}}\right)$.

(Sugerencia: Para el primer inciso note que para toda $B\in\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$

$$(\mu*\nu)(B)=\int\mu(B-t)d\nu(t).$$

Use Fubini para el segundo).

149. Sean μ_1,μ_2,ν_1,ν_2 medidas σ-finitas definidas en un espacio medible (X,S).

i) Si $\nu_1\ll\mu_1$ y $\nu_2\ll\mu_2$, entonces $\nu_1\otimes\nu_2\ll\mu_1\otimes\mu_2$ y

$$\frac{d(\nu_1\otimes\nu_2)}{d(\mu_1\otimes\mu_2)}(x,y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\otimes\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y)\ \text{(c.d. rel. } \mu_1\otimes\mu_2).$$

ii) Si $\nu_1\perp\mu_1$ y $\nu_2\perp\mu_2$, entonces $\nu_1\otimes\nu_2\perp\mu_1\otimes\mu_2$.

iii) Obtenga la descomposición de Lebesgue de $\nu_1 \otimes \nu_2$ con respecto a $\mu_1 \otimes \mu_2$ en términos de las descomposiciones de ν_1, con respecto a μ_1 y de ν_2 con respecto a μ_2.

150. (Versión integral de la desigualdad de Minkowski).

Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitos, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ una función $S \otimes T$ medible y $q \in (1, \infty)$. Pruebe:

$$\left(\int \left(\int |f(x,y)|\, d\nu\right)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int \left(\int |f(x,y)|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} d\nu$$

es decir

$$\left\| \int |f(x,y)|\, d\nu \right\|_q \leq \int \|f(x,\bullet)\|_q\, d\nu$$

(Sugerencia: Sea $J(x) = \int |f(x,y)|\, d\nu$, pruebe que para toda s función S-simple en $\mathcal{L}_p(\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se tiene:

$$\left|\int Js\, d\mu\right| \leq A\|s\|_p \quad \text{con} \quad A = \int \left(\int |f(x,y)|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} d\nu$$

y aplique el ejercicio (78). Use el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder. Ver [H-L-P] p 148).

Índice analítico

iii) Obtenga la descomposición de Lebesgue de $\nu_1 \otimes \nu_2$ con respecto a $\mu_1 \otimes \mu_2$ en términos de las descomposiciones de ν_1, con respecto a μ_1 y de ν_2 con respecto a μ_2.

150. (Versión integral de la desigualdad de Minkowski).

Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función $S \otimes T$ medible y $q \in (1, \infty)$. Pruebe:

$$\left(\int \left(\int |f(x,y)| \, d\nu \right)^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \int \left(\int |f(x,y)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} d\nu$$

es decir

$$\left\| \int |f(x,y)| \, d\nu \right\|_q \leq \int \|f(x,\bullet)\|_q \, d\nu$$

(Sugerencia: Sea $J(x) = \int |f(x,y)| \, d\nu$, pruebe que para toda s función S-simple en $\mathcal{L}_p(\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se tiene:

$$\left| \int Js \, d\mu \right| \leq A \|s\|_p \quad \text{con} \quad A = \int \left(\int |f(x,y)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} d\nu$$

y aplique el ejercicio (78). Use el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder. Ver [H-L-P] p 148).

Índice analítico