Teorema de convergencia de Vitali

Majo Gil - 20337

Contexto

¿Qué teoremas de convergencia conocemos?

- Teorema de convergencia monótona
- Lema de Fatou
- Teorema de convergencia Dominada

Contexto

El teorema fue propuesto por el matemático italiano Giuseppe Vitali en el año 1907 (Antes de que Lebesgue propusiera el Teorema de convergencia dominada, en 1910), y es considerado como una generalización del teorema de convergencia dominada

Naturalmente surge la duda, si es la generalización, ¿Por qué no se utiliza en lugar del de convergencia dominada?

Construcción de la demostración: *Definiciones*

Integrabilidad uniforme:

- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una familia de funciones mesurables. $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable si

$$\forall \epsilon\ 0\ \exists\, w_\epsilon \in \mathcal{L}^1(\mu), w_\epsilon \geq 0 :$$

$$\sup_{u \in \mathcal{F}} \int_{|u| > w_\epsilon} |u| d\mu < \epsilon$$

Convergencia en medida

- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una sucesión de funciones mesurables $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ converge en medida si

$$\forall \epsilon\ 0\ \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty :$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{|u_n - u| > \epsilon\} \cap A) = 0$$

Para algún $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

2.2.1. Lema 1

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu), p \in [1,\infty)$, y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathscr{A})$. Entonces

i) $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = 0$ entonces $u_n \xrightarrow{\mu} u$

ii) $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x)$ c.t.p. entonces $w_n \xrightarrow{\mu} w$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $\mu\{|w| = \infty\} = 0$, entonces

iii) $w_n \xrightarrow{\mu} w$ entonces $f \circ w_n \xrightarrow{\mu} f \circ w$

iv) $w_n \xrightarrow{\mu} w$ entonces $w_n \wedge v \xrightarrow{\mu} w \wedge v$ para cualquier $v \in \mathcal{M}(\mathscr{A})$

Construcción de la demostración: *Lemas*

Demostración lema 1

i. Utilizando la desigualdad de Markov:

$$\mu(\{|u_n - u| > \epsilon \cap\ A) \leq \mu\{|u_n - u|^p > \epsilon^p\} \leq \frac{1}{\epsilon^p}||u_n - u||_p^p$$

ii. Veamos que $\forall \epsilon > 0$

$\{|w_n - w| > \epsilon\} \subset \{|w_n - w| \geq \epsilon\} = \{\epsilon \wedge |w_n - w| \geq \epsilon\}$. Utilizando la desigualdad de Markov

$$\mu(\{|w_n - w| > \epsilon\} \cap\ A) \leq \mu(\{\epsilon \wedge |w_n - w| \geq \epsilon\} \cap\ A$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon}\int_A^{\cdot} \epsilon \wedge |w_n - w| d\mu\ = \frac{1}{\epsilon}\int (\epsilon \wedge \backslash|w_n - w|)\mathbb{I}_A\, d\mu\,.$$

Si $\mu(A) < \infty$, la función $\epsilon\mathbb{I}_A \in\ \mathcal{L}^1(\mu)$ es integrable y domina el integrando $(\epsilon \wedge |w_n - w|)\mathbb{I}_A$, y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \int_A^{\cdot}(\epsilon \wedge |w_n - w|)d\mu = 0$.

Demostración lema 1

iii. La idea del (iii) es utilizar las propiedades de la composición y la continuidad uniforme para obtener que

$$\{|f \circ w - f \circ w_n| > \epsilon\} \subset \{|w - w_n| > \delta\} \cup \{|w| > R\}, \text{ donde } R > 0.$$

A partir de esto, dado que $\mu(A) < \infty$ y recordando que $w_n \overset{\mu}{\to} w$ obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(\{|f \circ w - f \circ w_n| > \epsilon\} \cap A) \leq \mu(\{|w| > R\} \cap A) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \text{ dado que } \mu\{|w| = \infty\} = 0\,.$$

iv. Veamos que

$$w_n \wedge v - w \wedge v = \left\{ \begin{array}{ll} w_n - w & \text{if } w_n, w \leqslant v \\ 0 & \text{if } w_n, w \geqslant v \\ w_n - v \leqslant 0 & \text{if } w_n \leqslant v \leqslant w \\ v - w \leqslant 0 & \text{if } w \leqslant v \leqslant w_n \end{array} \right\} \leqslant |w_n - w|.$$

Esto implica que $|w_n \wedge v - w \wedge v| \leq |w_n - w| \overset{\mu}{\to} 0$, y se cumple la propiedad.

2.2.2. Lema 2

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathscr{A})$ una sucesión $u_n \xrightarrow{\mu} u$. Si $|u|, |u_n| \leq w$ para algún $w \in \mathcal{L}^p, p \in [1, \infty)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = 0 \text{ y } \quad \lim_{n\to\infty} \int |u_n|^p \, d\mu = \int |u|^p d\mu.$$

Construcción de la demostración: *Lemas*

Demostración lema 2

Veamos que $u, u_n \in \mathcal{L}^p$. Se sigue la demostración del teorema de convergencia dominada, y obtenemos que para $\epsilon > 0\ y\ R > 0$, utilizando el dato que $|u_n| \leq w$ obtenemos que

$$\int |u_n|^p d\mu = \int_{\{|u_n| \leq \epsilon\}} |u_n|^p\, d\mu + \int_{\{|u_n|>\epsilon\}\cap\{w>R\}} |u_n|^p\, d\mu + \int_{\{|u_n|>\epsilon\}\cap\{w\leq R\}} |u_n|^p\, d\mu$$

$$= \int_{\{|u_n|\leq\epsilon\}\cap\{|u_n|\leq w\}} |u_n|^p\, d\mu + \int_{\{|u_n|>\epsilon\}\cap\{|w>R\}} |u_n|^p\, d\mu + \int_{\{|u_n|>\epsilon\}\cap\{\epsilon<w\leq R\}} |u_n|^p\, d\mu$$

$$\leq \int \epsilon^p \wedge\, w^p\, d\mu + \int_{\{w>R\}} w^p d\mu + R^p\, \mu(\{|u_n| > \epsilon\} \cap \{w > \epsilon\})\,.$$

Para finalmente utilizar la desigualdad de Markov y de nuevo la convergencia dominada para concluir que, siendo $R \to \infty\ y\ \epsilon \to 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \int |u_n|^p d\mu \leq \int \epsilon^p \wedge w^p d\mu + \int_{\{w>R} w^p d\mu \xrightarrow{con.dom.} \int \epsilon^p \wedge\, w^p\, d\mu \xrightarrow{con.dom.} 0$$

2.2.3. Lema 3

Supongamos que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es $\sigma-$finita y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathscr{A}$ converge en medida a u. Entonces u es única c.t.p.

Construcción de la demostración: *Lemas*

Demostración Lema 3

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión con $A_k \uparrow X \; y \; \mu(A_k) < \infty$. Supongamos que $u \; y \; w$ son dos funciones mesurables tal que $u_n \xrightarrow{\mu} u$ y $u_n \xrightarrow{\mu} w$. Dado que $|\mathrm{u} - \mathrm{w}| \leq |u - u_n| + |u_n - w|$ tenemos que para $\epsilon > 0 \;\; y \; n \in \mathbb{N}$

$$\{|u - w|\} > 2\epsilon\} \subset \{|u - u_n| > \epsilon\} \cup \{|u_n - w| > \epsilon\}, \text{ entonces}$$

$$\mu(A_k \cap \{|u - w| > 2\,\epsilon\})$$
$$\leq \mu(A_k \cap \{|u - u_n| > \epsilon\}) + \mu(A_k \cap \{|u_n - w| > \epsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Se cumple para todo $\mathrm{k} \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$, entonces el conjunto derecho de nuestra desigualdad es nulo y entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N},\epsilon\in\mathbb{Q}^+}(A_k \cap \{|u - w|\} > \epsilon\})$ también es nulo

Teorema de Convergencia de Vitali

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ −finita y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu), p \in [1, \infty)$ una sucesión que converge en medida a alguna función mesurable $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

i. $\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_p = 0;$

ii. $(|u_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia uniformemente integrable;

iii. $\lim_{n\to\infty} \int |u_n|^p \, d\mu = \int |u|^p d\mu < \infty.$

En otras palabras

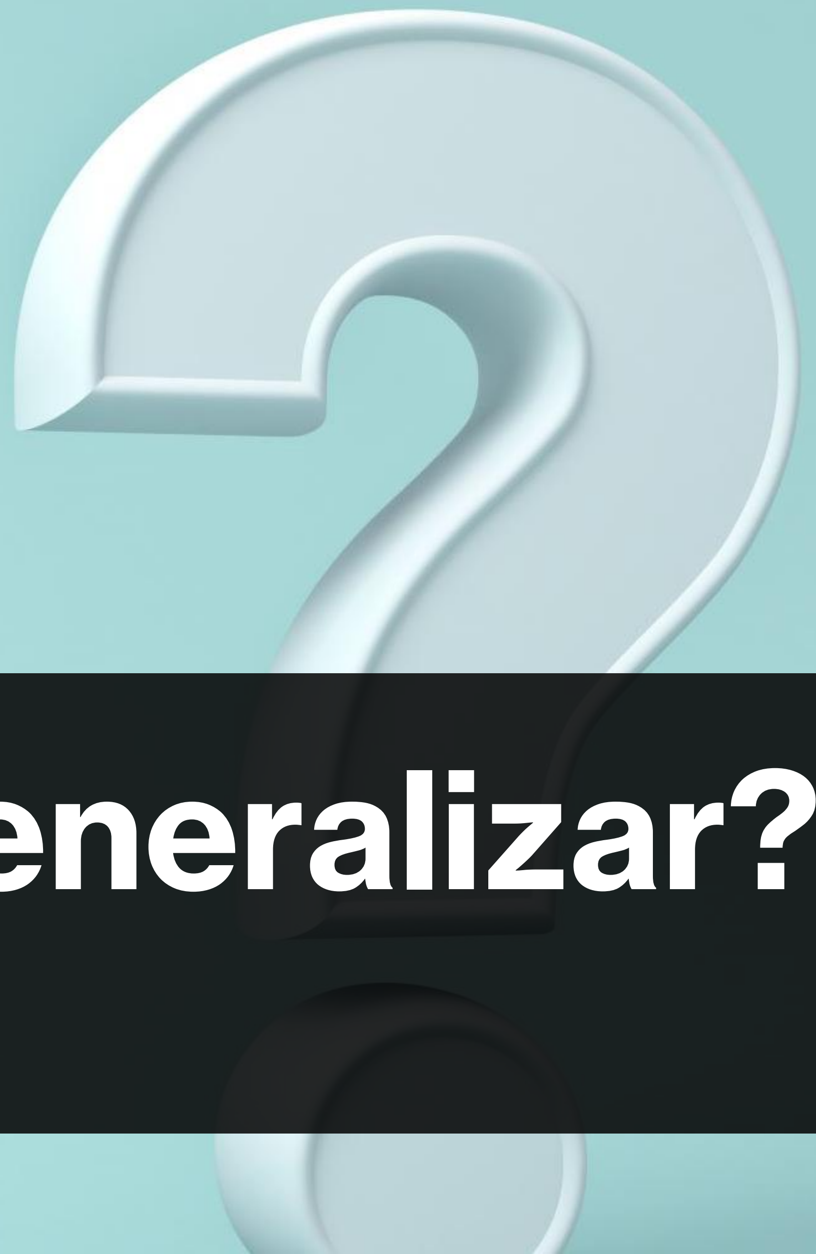
Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de medida finita. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $u_n \to u$ c.t.p. con u finita c.t.p. Entonces u es integrable y $\int_{\boldsymbol{F}}^{\cdot} \boldsymbol{u_n} \to \int_{\boldsymbol{F}}^{\cdot} \boldsymbol{u}$ para todo subconjunto medible Fde $\mathcal{A}$ si y solo si las integrales $\int_{E}^{\cdot}$ son uniformemente absolutamente continuas: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(F) < \delta$ entonces $|\int_{\boldsymbol{F}}^{\cdot} \boldsymbol{u_n}| < \boldsymbol{\epsilon}$ para todo n

Pruebas del teorema de Vitali

- En el libro de Schilling pueden encontrar la demostración realizada, utilizando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue
- Para una alternativa sin utilizar el Teorema de Convergencia Dominada, a mí me gustó esta prueba, que encontré en math.stackexchange.com:

¿Se puede generalizar?

Si sí... ¿Cómo?



Teorema generalizado

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ no σ −finita. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

i. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{L}^p(\mu)$;

ii. $(|u_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable;

iii. $\left(|u_n|_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$.

¿Qué más nos dice el teorema?

La integrabilidad uniforme implica la continuidad absoluta uniforme

La integrabilidad uniforme implica la convergencia en $\mathcal{L}^1$

La integrabilidad uniforme es una condición suficiente para la compacidad secuencial relativa débil