Teorema de Cambio de Variable (Transformada de Jacobi)

Wilfredo Gallegos Paz

Universidad del Valle de Guatemala
Teoría de la medida

3 de junio de 2023

Tabla de contenido

Definiciones y lemas previos

Definición 1

Sea M_d el conjunto de matrices $d \times d$ con valores reales y sea D una funcion real definida en M_d, entonces la matriz A se define como $A = A_1, A_2, ..., A_d$ y la notación usada es $D(A) = D(A_1, A_2, ..., A_d)$.

Lema 1

Para cada $d \in \mathbb{Z}^+$ se cumple:

1. existe un único determinante, det(A), en M_d
2. det(AB)=det(A)det(B)
3. det(A)$\neq$0 ssi A es invertible
4. det(A^t)=det(A)

Por otro lado, sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una transfomación lineal. Si A es la matriz de T respecto a $\mathbb{R}^d$ y B tambien es matriz de $\mathbb{R}^d$ tal que A y B son de distinta base ordenada, entonces existe una matriz invertible U$\ni$ $A = UBU^{-1}$ y se cumple $det(A) = det(U)det(B)det(U^{-1})$

Definiciones y lemas previos

Propiedad 1

Sea $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un mapeo lineal invertible, entonces:

$$\lambda(T(B)) = |det(T)|\lambda(B)$$

Lo cual se cumple para cada subconjunto B de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definición

Sea X y Y espacios de Banach, sea U un subconjunto abierto de X y sea x_0 elemento de U. Una función $F : U \to Y$ es diferenciable en x_0 si existe un mapeo lineal continuo $T : X \to Y$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||F(x) - F(x_0) - T(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0 \tag{1}$$

Es claro que el mapeo T que satisface lo anterior es único, el cual es la derivada de F respecto a x_0, y es denotada como: $F'(x_0)$

Propiedad(Regla de la cadena)

Sea X, Y, Z espacios de Banach, y sea U y V subconjuntos abiertos de X y Y. Si $x_0 \in U$, si $G : U \to Y$ es diferenciable en x_0 y se satisface que $G(U) \subseteq V$ y si $F : V \to Z$ es diferenciable en $G(x_0)$, entonces $F \circ G$ es diferenciable en x_0 y se cumple

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(G(x_0)) \circ G'(x_0)$$

Definición

Se define la norma sobre el espacio $\mathbb{R}^d$ como $||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_d|)$ denotado como: $|| \cdot ||_\infty$, en lo anterior, $x_1, x_2, ..., x_d$ son los componentes del vector x. Si $\mathbb{R}^d$ es dotado con con la norma $|| \cdot ||_\infty$, si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es transformacion lineal y si (a_{ij}) es la matriz de T, entonces T es continua y su norma se define como:

$$||T|| = \max_i \sum_{j=1}^{d} |a_{ij}| \tag{2}$$

Definiciones y lemas previos

Propiedad

Ahora sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, $F : U \to \mathbb{R}^d$ una función y sea $f_1, ..., f_d$ los componentes de F en U, tal que $F(x) = (f_1(x), ..., f_d(x))$ se cumple para todo x en U. entonces F es C^1 si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas en cada punto de U con i,j=1,...,d.

Lema 2

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y sea $F : U \to \mathbb{R}^d$ una funcion C^1. Entonces F es diferenciable en cada punto de U, y la matriz de F'(x) es $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$

Lema 3

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y sea $F : U \to \mathbb{R}^d$ una funcion diferenciable en cada punto de U. Si x_0 y x_1 puntos consecutivos pertenecientes a U y $||F'(x)|| \leq C$ se cumple para cada punto de x, entonces

$$||F(x_1) - F(x_0)||_\infty \leq C||x_1 - x_0||_\infty$$

Definiciones y lemas previos

Definición

Ahora se define el Jacobiano J_F sobre la función F de clase C^1 como

$$J_F(x) = det(F'(x))$$

De los lemas 1 y 3 mencionados se concluye que el jacobiano de tal función es continuo y tambien Borel measurable

Lema 4

Sea U, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ y sea T una biyección(inyectiva y sobreyectiva) de U en V tal que T y T^{-1} son ambas de clase C^1(T es difeomorfismo). Supongase que **a** es un numero positivo y B es subconjunto de $\mathcal{B}(U)$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados

1. Si se cumple $|J_T(x)| \leq a$ para cada x en B, entonces $\lambda(T(B)) \leq a\lambda(B)$
2. Si se cumple $|J_T(x)| \geq a$ para cada x en B, entonces $\lambda(T(B)) \geq a\lambda(B)$

PRUEBAS DE LOS LEMAS EN LA PAGINA 159, LIBRO MEASURE THEORY DE DONALD COHN

Teorema de cambio de Variable

Sea U y V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$, y sea T una biyección(inyectiva y sobreyectiva) de U en V tal que T y T^{-1} son ambas de clase C^1(T es difeomorfismo). Entonces cada subconjunto B de $\mathcal{B}(U)$ satisface lo siguiente

$$\lambda(T(B)) = \int_B |J_T(x)|\lambda(dx) \tag{3}$$

y cada función $f : V \to \mathbb{R}$ borel measurable satisface

$$\int_V f d\lambda = \int_U f(T(x))|J_T(x)|\lambda(dx) \tag{4}$$

en el sentido de que si una de las integrales mencionadas anteriormente existe, entonces ambas deben existir.
Notese que, T y T^{-1} son Borel measurable, por lo que un subconjunto B de U es un conjunto de Borel si y solo si T(B) es de Borel y que se cumple $T^{-1}(T(x)) = x$. [Cohn, 2010]

Puntos claves que(personalmente considero que) sirven para la prueba esquema para (3)

1. Función simple f(x):=$\sum c_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$
2. Si f es Lebesgue Mesurable, i.e. $f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(U))$
   $\Rightarrow \int \mathbb{1}_B d\lambda = \lambda(B) = \int_B d\lambda = \int_B \lambda(dx) \ \ \forall B \subset U \subset \mathcal{B}$
3. $\lambda(T(B)) \overset{propiedad\ 1}{=} |det(T)|\lambda(B) = \int_B |det(T)|\lambda(dx)$
   En este caso por definicion de jacobibiano sobre T(x) (def prev. lema 4) tenemos $|det(T(x))| = |J_T(x)|$
4. $\lambda(T(B)) = \int_B |J_T(x)|\lambda(dx)$

Teorema de cambio de Variable

Puntos claves que(personalmente considero que) sirven para la prueba esquema para (4)

$$T^{-1}[T(x)] = x \in U \xrightarrow{\quad T \quad} \left.\begin{matrix} T(U)\subset \\ T(x)\in \end{matrix}\right\} V$$

$$B \subset$$

$$T : x \longmapsto y$$
$$f : y \longmapsto z \in \mathbb{R}$$

$$V \ \Big\downarrow f$$

$$\left.\begin{matrix} f(T(x))\in \\ f(T(U))\subset \\ f(y)\in \end{matrix}\right\} \mathbb{R}$$

$$\int_V f(y)\,\lambda(dy) \underset{\uparrow}{=} \int_{T(U)} f(y)\,\lambda(dy) \Rightarrow$$

por hipotesis

$$\Rightarrow \int_{\substack{T(U)\\ \subset V \Rightarrow dy}} f(y)\,\lambda(dy) = \int_{\substack{T^{-1}(T(U))\\ \subset U \Rightarrow dx}} f(T(x))\cdot\lambda(T^{-1}[T(x)])$$

por hipotesis de T & T^{-1}

$$= \int_U f(T(x))\cdot \underbrace{|\det T^{-1}[T(x)]|}_{|J_T(x)|}\cdot\lambda(dx)$$

por definición y por $T^{-1}T(x) = x$

$$= \int_U f(T(x))\cdot|J_T(x)|\,\lambda(dx)$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Coordenadas polares

Aplicando el teorema a coordenadas polares en $\mathbb{R}^d$. Sea R un numero positivo y sea

$$U = \{(r, \theta) : 0 < r < R \text{ y } 0 < \theta < 2\pi\}$$

Sea

$$V = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$$

y sea V_0 el conjunto compuesto por los puntos en V que no estan en el lado negativo del eje X. Se define $T : U \to \mathbb{R}^2$ como $T(r, \theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$. Entonces T, U, y V_0 satisfacen la hipotesis del teorema de cambio de variable. por lo tanto $J_T(r, \theta) = r$. Y como V y V_0 difieren solo por un conjunto con medida de lebesgue nula, entonces cada funcion integrable $f : V \to \mathbb{R}$ satisface

$$\int_V f d\lambda = \int_{V_0} f d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(rcos(\theta), rsin(\theta)) r dr d\theta$$

De esta manera obtenemos la formula estándar para la evaluación de integrales a través de coordenadas polares. [Badajoz, 2018] REVISAR TEOREMA DE FUBINI

Ejemplos

Ejemplo 2: Coordenadas esféricas

Para $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y el difeomorfismo definido por las coordenadas esféricas $F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho cos\varphi sin\theta, \rho sin\varphi sin\theta, \rho cos\theta)$ y V=F(U)=$\mathbb{R}^3 - (x, 0, z) : x > 0$ se tiene que

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| = \rho^2 sin(\theta)$$

y utilizando el teorema de fubini se tiene que

$$\int_V f dm_3 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\rho cos\varphi sin\theta, \rho sin\varphi sin\theta, \rho cos\theta)\rho^2 sin(\theta) d\rho d\varphi d\theta$$

Generalización del teorema de Cambio de Variable

Mapeo Hölder-Continuo Un mapeo $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_d) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ se dice es de Holder continuo con indices $\alpha \in (0, 1]$, cuando satisface lo siguiente

$$|\Phi(x) - \Phi(y)|_{L^\infty(d)} \leq L|x - y|^\alpha_{L^\infty(n)} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Familia de conjuntos Borel measurables de medida nula λ^n

$$\mathcal{N}(\lambda^n) := \{N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \lambda^n(N) = 0\}$$

Lema

Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ un mapeo Hölder-Continuo con indice $\alpha \in (0, 1]$. Si $\alpha d \geq n$, entonces

$$N^* \subset N \in \mathcal{N}(\lambda^n) \Rightarrow \exists M \in \mathcal{N}(\lambda^d) \ni \Phi(N^*) \subset M$$

[Schilling, 2017]

Generalización del teorema de Cambio de Variable

La completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ se define como

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n) = \{B^* : B^* = B \cup N^*, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), N^* \subseteq N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n(N) = 0\}$$

donde N es el conjunto de todos los conjuntos de medida nula según λ^n, y se define

$$\overline{\lambda}^n(B^*) := \lambda^n(B) \ y \ \mathcal{N}(\overline{\lambda}^n) = \{N^* : \exists N \in \mathcal{N}(\lambda^n), N^* \subseteq N\}.$$

Notación: $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n), \overline{\lambda}^n)$

Corolario

Sea $B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ y tomamos a U como el interor del abierto B, i.e. $U = B^\circ$ tal que $B \subset U'$ donde U es vecindad abierta. Por otro lado sea $\Phi : U' \to \mathbb{R}^n$ una mapeo Hölder-Continuo. Si B-U$\in \mathcal{N}(\overline{\lambda}^n)$ y si $\Phi : U \to \Phi(U)$ es un $C^1 - \textit{difeomorfismo}$, entonces

$$\int_{\Phi(B)} u(y)\overline{\lambda}^n(dy) = \int_B u \circ \Phi(x)|detD\Phi(x)|\overline{\lambda}^n(dx) \quad \forall u \in \mathcal{M}^+(\overline{\mathcal{B}}(\Phi(B)))$$

Referencias

Badajoz (2018).
Apuntes de Teoria de la medida, volume 2.

Cohn, D. L. (2010).
Measure Theory, volume 2.
Birkhäuser.

Schilling, R. L. (2017).
Measure, Integrals and Martingales, volume 2.
Cambridge University.

¿Preguntas?
Muchas gracias
gal20399@uvg.edu.gt