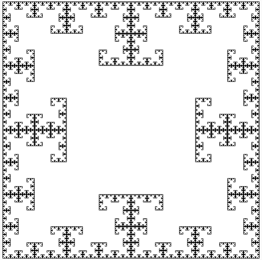
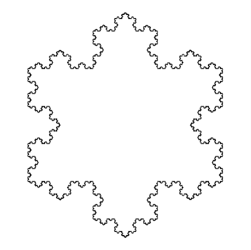
Medida de Hausdorff

Juan Luis Solórzano

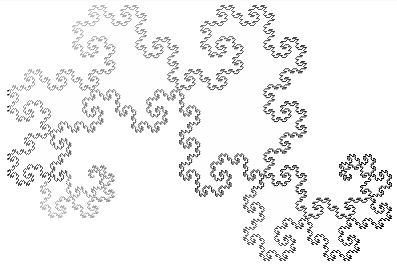
Introducción



(a)



(b)



(c)

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, se le llama diámetro de A, notado $diam(A)$ o $|A|$, al valor

$$|A| = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico Λ una familia de subconjuntos de X tales que $\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists A \in \Lambda$ tal que $x \in A$ y $|A| \leqslant \delta$ se define Λ_δ como

$$\Lambda_\delta = \{A \in \Lambda : |A| \leqslant \delta\}$$

Definición

Sea $B \subseteq X$, una familia $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una δ-cubierta de B si

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } U_i \in \Lambda_\delta, \forall i \in \mathbb{N}$$

Teorema de Extensión de Carathéodory

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un semi-anillo. Sea $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ una pre-medida en $\mathcal{S}$, esto es:

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) para $\{A_k\}_{k \geqslant 1}$, disjuntos a pares, vale $\mu\left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k\right) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(A_k)$

Entonces, μ posee una extensión a una medida μ en $A = \sigma(\mathcal{S})$

Si, además, S posee una secuencia exhaustiva $S_k \nearrow X$, tal que $\mu(S) < \infty$, $\forall k \geqslant 1$, entonces dicha extensión es única.

Esquema de la prueba:

Para cada $A \subseteq X$, consideramos la familia de S-coberturas enumerables de A:

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \{S_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq \bigcup_k S_k \right\}$$

Si A no admite cobertura enumerables en S, entonces definimos $\mathcal{C}(A) = \emptyset$

Definimos la función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, por

$$\mu^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{k \geqslant 1} \mu(S_k) : \{S_k\}_{k \geqslant 1} \in \mathcal{C}(A) \right\}$$

Cuando $\mathcal{C}(A) = \emptyset$, definimos $\mu^*(A) = \text{ínf}\, \emptyset = \infty$

Esquema de la prueba

1. Mostrar que μ es una medida exterior
    - $\mu^*(\emptyset) = 0$
    - $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$,
    - μ^* es σ-subaditiva: $\mu^*\left(\bigcup_k A_k\right) \geqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu^*(A_k)$
2. Mostrar que μ^* extiende a μ, esto es $\mu^*|_{\mathcal{S}} = \mu$
3. Definir conjuntos μ^*-mesurables, mediante la condición de Carathéodory:

$$\mathcal{A} = A \subseteq X : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q - A), \forall Q \subseteq X$$

4. Mostrar que $\mu * |_{\mathcal{A}}$ es una medida en A^*

Medida de Hausdorff

Para lo que sigue (X, d) es un espacio métrico con sus abiertos $\mathcal{O}$, sus cerrados $\mathcal{C}$ y su σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$

Ademas, $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función creciente continua por la derecha

Sea $C : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R}^+_\ni$

$$C(A) = \begin{cases} \Phi(|A|) \text{ si } A \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } \ = A = \emptyset \end{cases}$$

Definición

$$\mathcal{H}^{\Phi}_{\delta}(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} C(U_i) : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \text{es una } \delta - \text{cubierta de } A\right\}$$

$$\mathcal{H}^{\Phi}(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^{\Phi}_{\delta}(A)$$

A $\mathcal{H}^{\Phi}$ se le llama medida de Hausdorff

Nota

Cuando $\Phi(x) = x^s$ para algún $s > 0$, $\mathcal{H}^{\Phi} = \mathcal{H}^{S}$ y se le llama s-medida de Hausdorff o medida s-dimensional de Hausdorf.

Theorema

Sea $\mathcal{H}^s, s \geq 0$ una medida de Hausdorff en $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$*entonces*

1. $\mathcal{H}^0$ es la medida de conteo en $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$
2. $\mathcal{H}^1$ es las medida de Lebesgue sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$
3. $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ si $s > n$
4. $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $t > s \geq 0$
5. $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A) \;\; \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \;\; \forall \lambda \geqslant 0$

Ejemplo

Encuentre la $s-$medida de Hausdorff del intervalo $[0,1]$:

Consideremos $\Lambda_{\frac{1}{n}} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}$

Definición

La dimension de Hausdorff de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es:

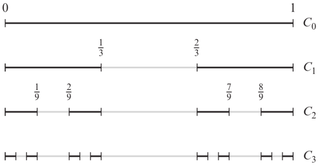
$$\begin{aligned} dim_{\mathcal{H}}(A) &= \text{ínf}\{s \in (0,\infty) : \mathcal{H}^s(A) = 0\} \\ &= \text{ínf}\{s \in (0,\infty) : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \\ &= \sup\{s \in (0,\infty) : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \sup\{s \in (0,\infty) : \mathcal{H}^s(A) > 0\} \end{aligned}$$

Lema

Sean $A, B, A_1, A_2; \dots \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjuntos arbitrarios, entonces

1. $A \subseteq B \Rightarrow dim_{\mathcal{H}}(A) \leqslant dim_{\mathcal{H}}(B)$
2. $dim_{\mathcal{H}}\left(\amalg_{i=1}^{\infty} A_i\right) = sup_{i\in\mathbb{N}} dim_{\mathcal{H}}(A_i)$
3. $\mathcal{H}^s(A) \in (0, \infty) \Rightarrow dim_{\mathcal{H}}(A) = s$

Calcule $dim_{\mathcal{H}}(C)$ donde C es el conjunto de Cantor



Calcule la s dimensión de Hausdorff de la curva de Koch:

References

J.B. Fraleigh.
A First Course in Abstract Algebra.
Pearson Education, 2003.

René Schiling.
Measure, Integrals and Martingales.
HZ Books. Cambridge University press, 2017.