Transformada de Fourier

Joshua Chicoj

Universidad del Valle de Guatemala

2023

Agenda

Agenda

Aclaraciones

- $C_b(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$

Aclaraciones

- $C_b(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$
- $C_c(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto

Aclaraciones

- $C_b(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$
- $C_c(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto
- $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ tales que $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$

Aclaraciones

- $C_b(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$
- $C_c(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto
- $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ hace referencia a las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ tales que $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$
- $\langle x, \xi \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k$, el producto escalar euclidiano usual en $\mathbb{R}^n$

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una medida finita μ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ está dada por

$$\hat{\mu}(\xi) := \mathcal{F}\mu(\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \mu(dx)$$

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una medida finita μ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ está dada por

$$\hat{\mu}(\xi) := \mathcal{F}\mu(\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \mu(dx)$$

Y la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\lambda^n)$ está dada por

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-if(x)\langle x,\xi\rangle} f(x)\ d\lambda^n$$

Propiedades de la transformada de Fourier

Sea μ una medida finita sobre $\mathbb{R}^n$ y $f \in L^1(\lambda^n)$. Las transformadas de Fourier $\hat{\mu}, \hat{f}$ son funcinoes continuas acotadas por

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leqslant \hat{\mu}(0) = (2\pi)^{-n}\mu(\mathbb{R}^n)$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \hat{f}(0) = (2\pi)^{-n}||f||_1$$

Propiedades de la transformada de Fourier

Función	Transformada de Fourier	
$\tilde{\mu}(dx) = \mu(-dx)$ $\tilde{f}(x) = f(-x)$	$\overline{\hat{\mu}(\xi)}$ $\overline{\hat{f}(\xi)}$	Relexión en el origen
$\mu \circ T^{-1}(dx)$	$e^{-i\langle b,\xi\rangle}\hat{\mu}(\lambda\xi)$	$Ty = \lambda y + b \ni \lambda \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$
$f(rx + c)$	$r^{-n}e^{i\langle c,r^{-1}\xi\rangle}\hat{f}(r^{-1}\xi)$	$r \neq 0, c \in \mathbb{R}^n$
$f(x)e^{-i\langle x,c\rangle}$	$\hat{f}(c + \xi)$	$c \in \mathbb{R}^n$
$f(Rx)$	$\hat{f}(R\xi)$	$R \in R^{n\times n}$ ortogonal

Agenda

Lema

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}$$

En particular, para $x, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin((a-x)\xi)}{\xi}\,d\xi = \lim_{T\to\infty}\int_0^{(a-x)T} \frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x < a \\ 0, & x = a \\ -\frac{\pi}{2}, & x > a \end{cases}$$

Teorema de Lévy

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces para todo $a < b$

$$\frac{1}{2}\mu\{a\} + \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu\{b\} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ib\xi} - e^{ia\xi}}{i\xi} \hat{\mu}(\xi)\ d\xi$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T} \frac{e^{i(b-x)\xi} - e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-T}^{0} \frac{e^{i(b-x)\xi} - e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\, d\xi + \int_{0}^{T} \frac{e^{i(b-x)\xi} - e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\, d\xi \\
&= \int_{0}^{T} \frac{e^{-i(a-x)\xi} - e^{-i(b-x)\xi}}{i\xi}\, d\xi + \int_{0}^{T} \frac{e^{i(b-x)\xi} - e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\, d\xi \\
&= 2\int_{0}^{T} \frac{\sin((b-x)\xi)}{\xi}\, d\xi - 2\int_{0}^{T} \frac{\sin((a-x)\xi)}{\xi}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Demostración

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{i(b-x)\xi}-e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\,d\xi=\begin{cases}0, & \text{if } x<a \text{ or } x>b,\\ \pi, & \text{if } x=a \text{ or } x=b,\\ 2\pi, & \text{if } a<x<b.\end{cases}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{ib\xi}-e^{ia\xi}}{i\xi}\widehat{\mu}(\xi)d\xi &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{ib\xi}-e^{ia\xi}}{i\xi}\int e^{-ix\xi}\mu(dx)d\xi \\
&\overset{(F)}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\int_{-T}^{T}\frac{e^{ib\xi}-e^{ia\xi}}{i\xi}e^{-ix\xi}\,d\xi\,\mu(dx) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\int_{-T}^{T}\frac{e^{i(b-x)\xi}-e^{i(a-x)\xi}}{i\xi}\,d\xi\,\mu(dx) \\
&\overset{(L)}{=} \int\left[\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{a\}}+\mathbb{1}_{(a,b)}+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{b\}}\right]d\mu \\
&= \tfrac{1}{2}\mu\{a\}+\mu(a,b)+\tfrac{1}{2}\mu\{b\}.
\end{aligned}
$$

Corolario 1 al teorema de Lévy

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, entonces para todo rectángulo abierto $I \in \mathcal{J}^0 \ni \mu(\partial I) = 0$

$$\mu(I) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} ... \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{ib_k\xi_k} - e^{ia_k\xi_k}}{i\xi_k} \hat{\mu}(\xi)\ d\xi_1 ... d\xi_n$$

Corolario 2 al teorema de Lévy

1. Sean μ, ν medidas finitas, si $\hat{\mu} = \hat{\nu} \implies \mu = \nu$
2. Sean $f, g \in L^1(\lambda^n)$, si $\hat{f} = \hat{g} \implies f = g$ Lebesgue c.t.p.

Corolario 3 al teorema de Lévy

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ y $\hat{\mu} \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$. En el caso $\mu(dx) = u(x)\ dx$ entonces

$$u(x) = \int \hat{\mu}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\ d\xi$$

Si $u \in L^1_{\mathbb{C}}$ & $\hat{u} \in L^1_{\mathbb{C}}$ entonces

$$u(x) = \int \hat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\ d\xi$$

Transformada inversa de Fourier

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La transformada inversa de Fourier está dada por

$$\check{\mu}(x) = \mathcal{F}^{-1}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(\xi)\ d\xi$$

Transformada inversa de Fourier

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La transformada inversa de Fourier está dada por

$$\check{\mu}(x) = \mathcal{F}^{-1}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(\xi)\ d\xi$$

La transformada inversa de una función $u \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$ está dada por

$$\check{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}u(\xi)\ d\xi$$

Transformada inversa de Fourier

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La transformada inversa de Fourier está dada por

$$\check{\mu}(x) = \mathcal{F}^{-1}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(\xi)\ d\xi$$

La transformada inversa de una función $u \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$ está dada por

$$\check{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}u(\xi)\ d\xi$$

Además, dada la naturaleza de la transformada de Fourier y su inversa, se tienen las siguientes relaciones

$$\check{u}(x) = (2\pi)^n\hat{\mu}(-x) \quad \overline{\hat{\mu}(x)} = (2\pi)^{-n}\check{\mu}(x) \quad \overline{\hat{u}(x)} = (2\pi)^{-n}\check{\bar{u}}(x)$$

Agenda

Teorema de convolución

Convolución de dos medidas

La convolución de dos medidas finitas μ, ν es una medida finita

$$\mu \star \nu(B) = \int\int \mathbb{1}_B(x+y)\ \mu(dx)\nu(dy),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Sean μ, ν medidas finitas sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, entonces

- $\widehat{\mu \star \nu}(\xi) = (2\pi)^n \hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi)$
- $\widecheck{\mu \star \nu}(\xi) = \check{\mu}(\xi)\check{\nu}(\xi)$

Simetría de la transformada de Fourier

Para una medida finita μ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ y $u \in L^1(\lambda^n)$ se tiene que

$$\int \hat{u}(x)\mu(dx) = \int u(\xi)\hat{\mu}(\xi)\ d\xi$$

Agenda

Teorema de Riemann-Lebesgue

Sea $u \in L^1(\lambda^n) \implies \hat{u} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

Agenda

Álgebra de Wiener

Consideremos

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^1(\lambda^n) : \hat{u} \in L^1(\lambda^n)\}$$

, entonces

1. $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \iff \hat{u} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$
2. $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \implies u \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$
3. $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \implies u \in L^p(\lambda^n),\ 1 \leqslant p < \infty$
4. $u, v \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \implies u \star v \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$
5. $u, v \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \implies uv \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

Lema de aproximación de unidad

Lema previo

Sean $u \in L^1(\lambda^n)$ y $g_t = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/tt} \implies u \star g_t \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

Sea $u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ uniformemente continua, entonces $\lim_{t \to 0} ||u - u \star g_t||_\infty = 0$

Convergencia débil

Sea $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y μ medidas finitas sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La secuencia de medidas converge debilmente si

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mu(dx) \ \forall u \in C_b(\mathbb{R}^n)$$

Teorema de convergencia débil

Sean μ y $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ medidas finitas sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

$$\hat{\mu}_k(\xi) \xrightarrow[\forall \xi]{k\to\infty} \hat{\mu}(\xi) \iff \mu_k \xrightarrow[d\acute{e}bil]{k\to\infty} \mu$$

Lema previo

El álgebra de Wiener $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ es densa en $L^p_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$, $1 \leqslant p < \infty$ y $C_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Sea $u \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda^n) \cap L^1_{\mathbb{C}}(\lambda^n) \implies ||\hat{u}||_2 = (2\pi)^{-n/2}||u||_2$. En particular, hay una extensión contínua $\mathcal{F} : L^2_{\mathbb{C}}(\lambda^n) \to L^2_{\mathbb{C}}(\lambda^n)$

Agenda

Lema

Sea μ una medida finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Entonces

1. Si $\int |x_k| \, \mu(dx) < \infty \implies \partial_k \hat{\mu} \in C_b(\mathbb{R}^n)$ y $\partial_k \hat{\mu}(\xi) = \widehat{(-i) x_k \mu}(\xi)$
2. Si $u, x_k u \in L^1(\lambda^n) \implies \partial_k \hat{u} \in C_b(\mathbb{R}^n)$ y $\partial_k \hat{u}(\xi) = \widehat{(-i) x_k u}(\xi)$
3. Si $\partial_k u \in L^1(\lambda^n)$ y $u \in C_\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\lambda^n) \implies \widehat{\partial_k u}(\xi) = i\xi_k \hat{u}(\xi)$

Espacio de Schwartz

El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de funciones suaves rápidamente decrecientes de valores complejos $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, las cuales decresen, junto a su derivada, más rápido que otro polinomio

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta u(x) \right| < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

En particular, $(n + x_1^{2n} + \ldots + x_n^{2n})|u(x)| \leqslant c, \ \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Utilizando desigualdades

$$\prod_{k=1}^{n} = (1+x_k^2) \leqslant \left[\max_{1\leqslant k\leqslant n} (1 + x_k^2) \right]^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} (1+x_k^2)^n \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} (1+x_k^{2n})$$

y combinando con el teorema de Fubini-tonelli, tenemos que $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int |u(x)| \ dx \leqslant c_d \int \ldots \int \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k^2)} = c_d \prod_{k=1}^{n} \int \frac{dx_k}{1 + x_k^2} < \infty$$

Biyectividad de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Biyectividad

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es biyectiva y $\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1. $\mathcal{F}^{-1}v(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx$
2. $\mathcal{F}^{-1}v(\xi) = (2\pi)^n \mathcal{F}v(-\xi)$ y $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}u(x) = (2\pi)^{-n}u(-x)$