Aquí está el esquema para empezar

Hechos clave acerca de su tema

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß fue un matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno». Entre sus logros más destacados figuran la definición de la continuidad de una función, demostrando el teorema del valor medio; y el teorema de Bolzano-Weierstrass usado posteriormente para estudiar las propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

Nacimiento: 31 de oct. de 1815

Lugar de nacimiento: Ennigerloh, Alemania

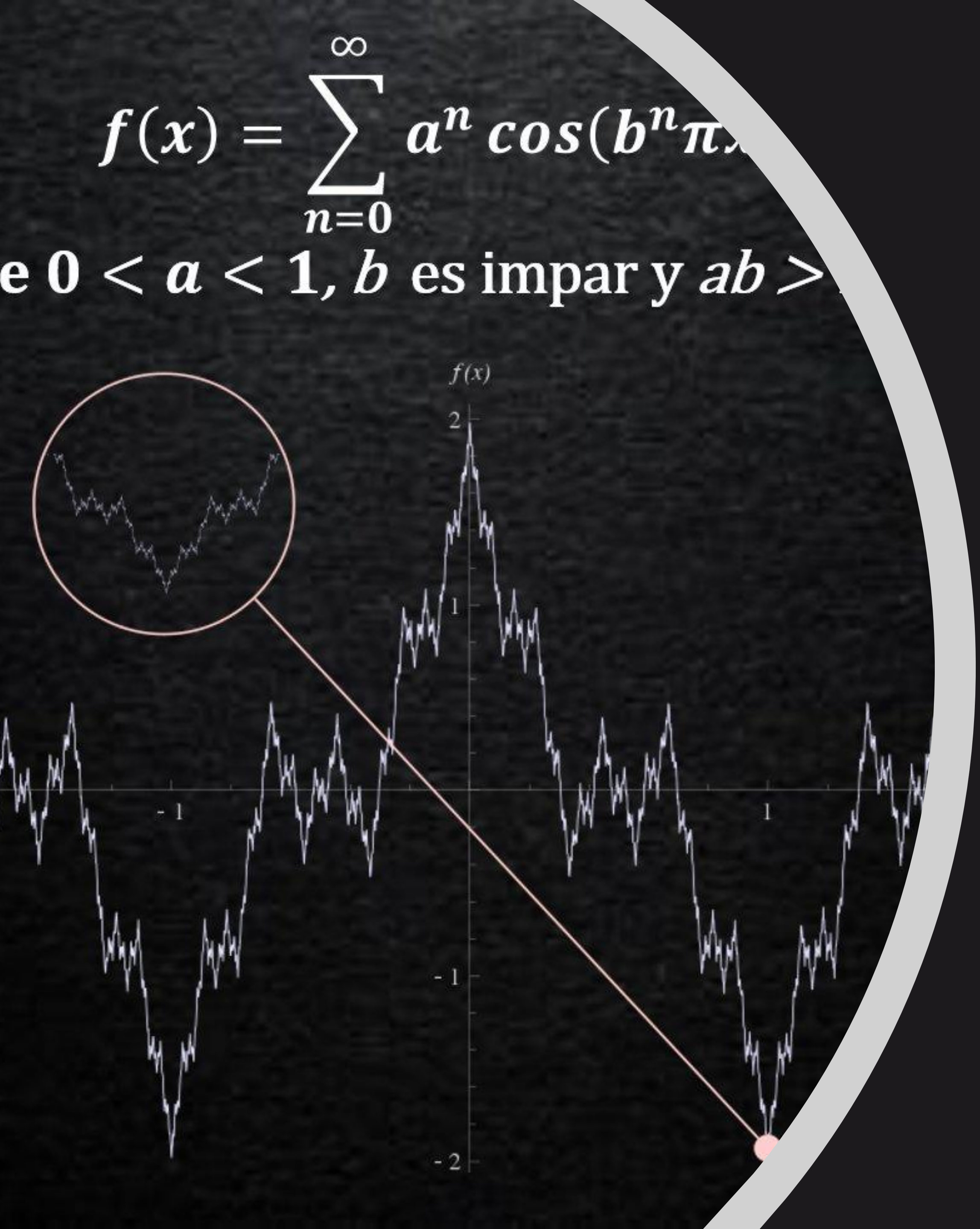
Defunción: 19 de feb. de 1897

Lugar de defunción: Berlín, Alemania

Premios: Medalla Copley

Academic advisor: Christoph Gudermann

Educación: Universidad de Bonn, Universidad de Münster



Teorema de Egorov y Teorema de Lusin

UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

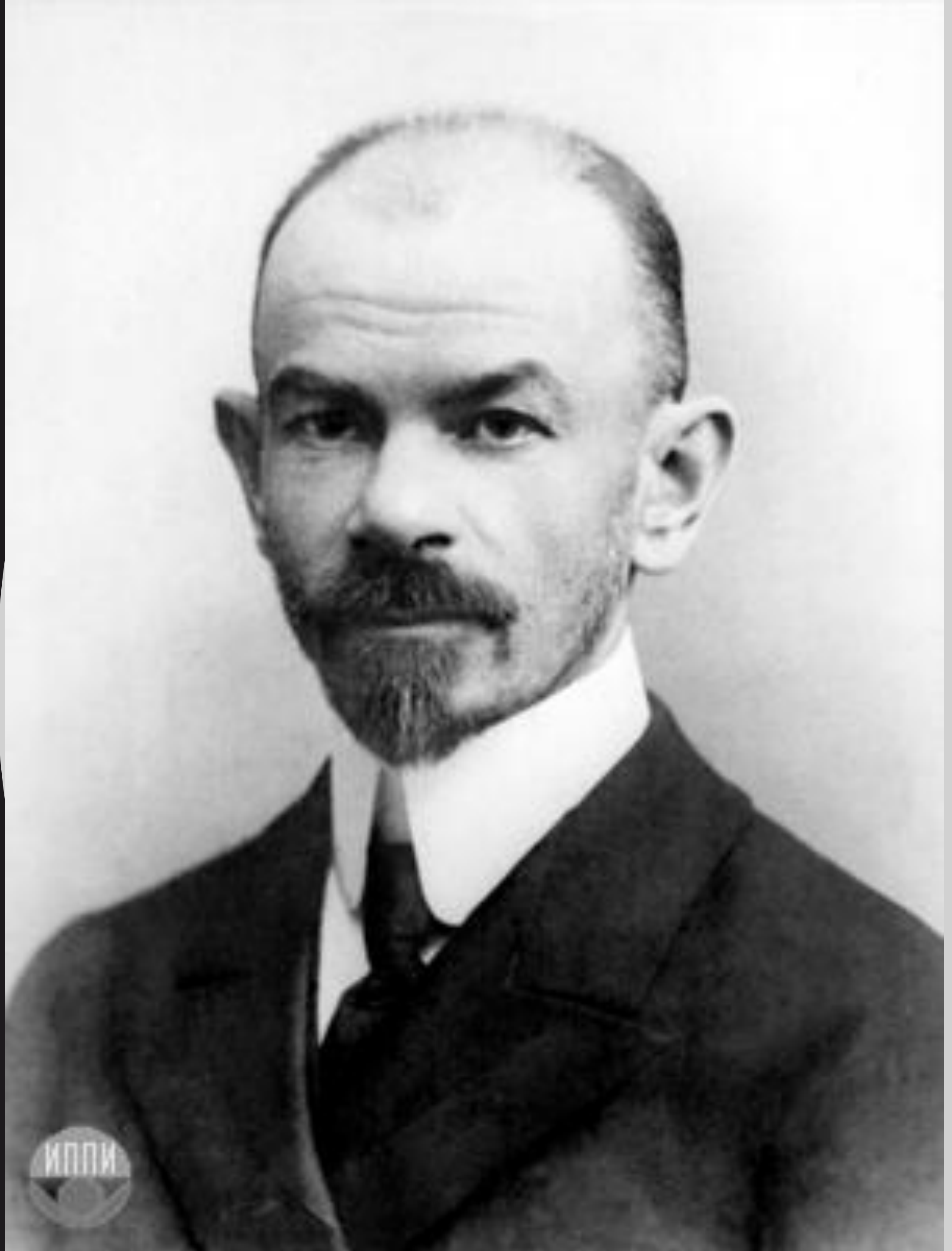
Por Guillermo Furlan carnet 20713

Contenido

- Apunte Historico
- Teorema de Egorov
- Cotra Ejemplo caso infinito
- Definiciones
- Teorema de Lusni
- Aplicación del Teorema de lusin

Dimitri Egorov

- Nació en 1869
- Fue presidente de la sociedad de matemáticos de Moscú.
- Fue director de la facultad de matemáticas en la universidad estatal de Moscú
- Se le atribuyen muchas pruebas y resultados en las áreas de Geometría diferencial y análisis



Nikolai Luzin

- Nació en 1883
- Fue estudiante de Egorov en la estatal de Moscú
- Catedrático en la Estatal de Moscú.
- Fue asesor de tesis de Pavel Urysohn
- Se le atribuyen pruebas relacionadas al análisis y la topología.

¿Convergencia Puntual implica convergencia absoluta?

Teorema de Egorov

Sea $\{f_k\}$ una secuencia de funciones mesurables que convergen casi en todo punto de un conjunto E de medida finita a un limite finito f. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto F de E tal que $|E - F| < \epsilon$ y $\{f_K\}$ converge uniformemente a f en E.

Teorema de Egorov

Sea $\{f_k\}$ una secuencia de funciones mesurables que convergen casi en todo punto de un conjunto E de medida finita a un limite finito f. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto F de E tal que $\mu(F) < \epsilon$ y $\{f_K\}$ converge uniformemente a f en F^c.

Importancia de Egorov

Si bien la convergencia puntual no implica convergencia uniforme , el teorema de Egorov da las condiciones para que se cumpla esta implicación. Pero estas son considerablemente restrictivas.

Lema 1

Sea $\{f_k\}$ una secuencia de funciones mesurables que convergen casi en todo punto de un conjunto E de medida finita a un limite finito f. Ademas sea $\eta\,, \epsilon > 0$. Entonces existe un subconjunot F de E y un entero K tal que $|E - F| < \eta$ y $|f(x) - f_K(x)| < \epsilon$ para todo $x \in F$ y $k > K$.

Idea de Demostración Egorov

La idea es escoger un conjuntos F_m aplicando el lema 1 y escoger epislon de la forma $\epsilon 2^{-m}$ luego intersectar los F_m para obtener el F el cual se acota pro la sub aditividad de la mededa

Contraejemplo

Considerece la funcion $f_n : \mathbf{R} \to R$ tal que $f_n(x) = \frac{x}{n}$y μ la media de lebesgue. notese que $f_n \to 0$ puntualmnte en R. Supongase que la conclucion del teorema de egorof es cierta, entonces para un $\epsilon > 0$ debe existir un E conjunto de Borel tal que $\mu(E) < \epsilon$ y $f_n \to 0$ unifromenmente en el complemento de E. Entonces por tener E medida acotada entonces $\mu(E^c) = \infty$. Ademas por la convergencia uniforme para un $\eta > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $n > N$ y cualuqier x en E^c entonces $|x/n| < \eta$. Por lo que se puede concluir que $|x| < \eta N$ entonces $E^c \subset (-\eta N, \eta N)$

Función casi uniformemente continua

sea $(X, \mathbf{A}, \mu$ un espacio de medida y $\{f_k\}$ una secuencia de funcione mesurables. Se dice que la secuencia converge casi uniformemente a f si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto B de X tal que $\mu(B^c) < \epsilon$ y y la secuencia converge unifmormente a f en B.

Aplicación del teorema

Problema:Sea f_n una secuencia de funciones mesurables sobre R y $f_n \to f$ casi en todo punto. A probar la existencia de una secuencia de conjuntos mesurables tal que la medida de lebsegue del complemento de la union de los conjuntos s 0 y que $f_n \to f$ de manera uniforme sobre cada conjunto.

Aplicación del teorema

Prueba: Sea $\epsilon > 0$ y notese que $R = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}(-n,n) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$ entonces por el teorema de Egorov eixtse E_k^n para cada k tal que $|I_n - E_n^k| < \frac{\epsilon}{k2^n}$. Notese que

$$|R - \bigcup E_k^n| = |\bigcup_n(\bigcap_k(I_n - E_k^n)| < \sum(lim_k|I_n - E_k^n| = 0)$$

¿Que es una función mesurable?

Sean $(X, A), (R, B)$ espacios mesurables. Se dice que una fucion $f : X \to R$ es mesurable si $f^{-1}(B) \subset A$

Propiedad L

Sea f un a funcion definidad sobre el conjunto E mesurable a R. entonces se dice que f tiene la propiedad L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un compacto F contenido en E tal que se cumple

1. $\mu(F^c) < \epsilon$
2. f es continua para el dominio restringido a F

Propiedad

Toda función simple y mensurable tiene la propiedad L

Teorema de Lusin

Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, sea **A** una sigma algebra on X . se μ una medida regular en $(X, \mathbf{A})$. Sea $f : X \to R$ una función mesurable en **A**. Sea $A \in \mathbf{A}$tal que $\mu(A) < \infty$ y sea $\epsilon > 0$ entonces existe un un subconjunto F compacto de A tal que $\mu(A - F) < \epsilon$ y f restringida en k sea continua. Ademas existe una funcion g que coincide con f en casi todo punto en K.

Teorema de Lusin

sea E un conjunto medible en un espacio métrico completo y separable X, y sea f una función medible y acotada definida en E. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua g definida en X tal que:

$g(x) = f(x)$ para todo x en un conjunto medible $A \subseteq E$ tal que $m(E - A) < \varepsilon$

y g es uniformemente continua en X.

En otras palabras si f es mesurable entonces tiene la propiedad L en E

Idea de la Demostración

Sea f mesurable, entonces se puede representar como el limite de una secuecnia de funciones simples$\{f_k\}$. por la propiedad 1 cada una de estas funciones simples tiene la propiedad L. Entonces se tiene un familia de $F_k cerrados$ con medida de complemento menor a $\epsilon 2^{-k-1}$. Si E tiene medida finita por el teorema de Egorov existe el compacto $f_0 \subset E$ con $F_0^c < \epsilon/2$. donde la seceucnia converge uniromemente a f. sea F la interseccion $F_0 con los f_K$. Entonces cada f_k es relativamente continuo respecto a F y por subaditividad de la medida , le mdediad de F compelmento esta acotado

Teorema de Lusin

Sea (x, A, μ) espacio de medida y f una función real sobre X. Supongase que para cada subconjuncto compacto K de X y cada $\epsilon > 0$ hay un subconjunto compacto J de K tal que J y f tiene la propiedad L. Entonces f es mesurable

Idea de la Demostración

DEM lusin de regreso

Supongase que f tiene la propiedad L en E. Escogase F_k cerrados tales que F^c tiene medida menor a 1/k y f es continua restringida a cada F_k Entonces. Con H como la union de los F_k contenido en E y Z el complemento de H tiene medida 0.Entonces

$$\{x \in E : f(x) > a\} = \{x \in H : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} = \bigcup \{x \in F_k : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a$$

pero $\{x \in Z : f(x) > a\}$ tiene medida 0 entonce f es mesurable respecto a E. y f es continua relativa a F_k mesurable entonces por lema 2 f es mesurable repsecto

Aplicación del Teorema

El teorema de Lusin se utiliza para demostrar que $C_c([a,b])$ el espacio de funciones continuas complejas con soporte compacto es denso en $L^p([a,b])$

Referencias

- Wheeden, Zygmud, Mesure and Integral , an itroduction to real analisis
-Cohn, Mesure Theory